Міністерство освіти і науки України

Хмельницький політехнічний коледж

Національного університету «Львівська політехніка»

**Методичні вказівки**

**до самостійної роботи студентів**

**з дисципліни**

**«Теорія ймовірностей і математична статистика»**

для спеціальності

121 Інженерія програмного забезпечення

Хмельницький, 2019

**Методичні вказівки** до самостійної роботи студентів з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика»

Укладач: І. А. Желавська, викладач математичних дисциплін , викладач вищої категорії

Рецензенти:

Л. М. Студницька,викладач вищої категорії, старший викладач, голова циклової комісії природничо-математичних дисциплін.

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової комісії природничо-математичних дисциплін

Протокол № від

Голова циклової комісії \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Л. М. Студницька

Хмельницький політехнічний коледж

Національного університету «Львівська політехніка»

Циклова комісія *природничо-математичних дисциплін*

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач відділення

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В. В. Гуменна

«*31*» *серпня* 2018 року

## *РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ*

*2.06 Теорія ймовірності і математична статистика*

спеціальність *121 Інженерія програмного забезпечення*

відділення *Програмної інженерії*

2018 – 2019 навчальний рік

Робоча програма *Теорія ймовірності і математична статистика* для студентів за спеціальністю *121 Інженерія програмного забезпечення*

Розробники:*Желавська Ірина Анатоліївна, викладач математики, викладач вищої категорії*

Робоча програма затверджена на засіданні циклової комісії *природничо-математичних дисциплін*

Протокол від *«31» серпня 2018 року № 1*

Голова циклової комісії \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Л. М. Студницька

©Желавська І. А., 2018 рік

# **Опис навчальної дисципліни**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Найменування показників | Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень | Характеристика навчальної дисципліни | |
| денна (заочна)  форма навчання | |
| Кількість кредитів – *3* | Галузь знань  12  Інформаційні технології | Нормативна | |
| Модулів – | Спеціальність:  121  Інженерія програмного забезпечення | **Рік підготовки:** | |
| Змістових модулів – | *3 (-) –*й | |
| Індивідуальне науково-дослідне завдання: | **Семестр** | |
| Загальна кількість годин – *90* | *5 (-)-*й | - |
| **Лекції** | |
| Тижневих годин для денної форми навчання: *3*  аудиторних – *48*  самостійної роботи студента – *42* | Освітньо-кваліфікаційний рівень:  молодший спеціаліст | *24(-)* год. | - |
| **Практичні, семінарські** | |
| *24(-)* год. | *-* |
| **Лабораторні** | |
| *-(-)*год. | *-* |
| **Самостійна робота** | |
| *42(-)*год. | *-* |
| **Консультації:** *- (-)*год. | |
| Вид контролю:  *Залік (-)* | |

1. **Мета та завдання навчальної дисципліни**

**Мета курсу** — викладення основ теорії ймовірності як математичної науки, що вивчає закономірності випадкових явищ, та їх практичне використання у побудові стохастичних моделей на мікро- та макрорівнях з використанням елементів регресійного аналізу; виробити первинні навички застосування теоретичного матеріалу в прикладних питаннях; оволодіння знаннями і вміннями, необхідними в практиці роботи сучасного програміста, достатніми для вивчення спеціальних дисциплін і для продовження освіти; привити студентам вміння самостійно вивчати навчальну літературу, довідники.

**Завдання** — підготувати висококваліфікованих, з належним інтелектуальним потенціалом спеціалістів. До майбутніх фахівців ставляться високі вимоги, які полягають не тільки в досконалих знаннях фаху, а й у вмінні перевести практичне завдання на математичну мову, володінні ймовірнісно-статистичним мисленням та інтуїцією. Розвивати алгоритмічне і логічне мислення. Сформувати вміння скласти реальну прикладну задачу і побудувати її модель.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

**знати:**

* важливі поняття теорії ймовірності;
* методи обчислення ймовірності випадкових подій та випадкових величин;
* числові характеристики та закони розподілу випадкових величин;
* закон великих чисел та граничні теореми теорії ймовірностей;
* базові поняття математичної статистики;
* методи опрацювання емпіричних даних, одержання точкових та інтервальних статичних оцінок невідомих параметрів, перевірки статистичних гіпотез на основі вибіркових даних;
* елементи теорії регресії і кореляції;

**вміти:**

* застосовувати методи обчислення ймовірностей складених випадкових подій;
* використовувати математичний апарат для дослідження дискретних і неперервних випадкових величин;
* застосовувати методи аналізу статистичної інформації для розв’язання типових практичних задач з поданням результатів у необхідному вигляді (числа, формули, графіка тощо);
* встановлювати теоретико-ймовірнісні закономірності та використовувати отримані результати для обґрунтування прийнятих рішень;
* самостійно орієнтуватися в літературних джерелах.

**Згідно з вимогами освітньої програми здобувачі освітнього ступення «молодший спеціаліст» набувають таких компетентностей.**

**Загальні компетентності:**

-здатність застосовувати знання в практичних ситуаціях;

-знання та розуміння предметної області, розуміння професійної діяльності;

-здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями;

-здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел.

**Спеціальні (фахові компетентності):**

-здатність забезпечити стандартні методи і моделі до вирішення імовірнісних задач;

-здатність оцінювати похибки обчислень;

-здатність розв’язувати задачі предметної галузі як за допомогою математичних пакетів, так і власних програм;

-здатність пристосовувати складні обчислювальні процедури систем математичного моделювання до конкретних особливостей розв’язуваних задач;

-здатність ефективно формувати стратегії в сфері організації обчислювальних процесів в інформаційних системах різного призначення в умовах невизначеності або ризику.

1. **Структура навчальної дисципліни**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Назви тем | Кількість годин | | | | | | | | | | | |
| денна форма | | | | | | заочна форма | | | | | |
| усьо  го | у тому числі | | | | | усьо | у тому числі | | | | |
| л | п | лаб | інд | с.р. | го | л | п | лаб | інд | с.р. |
| *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | *11* | *12* | *13* |
| **Розділ 1**. **Елементи комбінаторики** | | | | | | | | | | | | |
| Тема 1.1. Основні поняття та принципи комбінаторики | 10 | 2 | 2 | **-** | **-** | 6 | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
| Разом за розділом 1 | **10** | **2** | **2** | - | - | **6** | - | - | - | - | - | - |
| **Розділ 2**. **Випадкові події та ймовірності. Основні теореми теорії ймовірностей.** | | | | | | | | | | | | |
| Тема 2.1. Вступ до теорії ймовірностей. Випадкові події та ймовірності | 6 | 2 | **-** | **-** | **-** | 4 | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
| Тема 2.2. Основні теореми теорії ймовірностей | 6 | 2 | 2 | **-** | **-** | 2 | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
| Разом за розділом 2 | **12** | **4** | **2** | - | - | **6** | - | - | - | - | - | - |
| **Розділ 3**. **Послідовні незалежні випробування** | | | | | | | | | | | | |
| Тема 3.1. Послідовні незалежні випробування за схемою Бернуллі | 10 | 2 | 2 | **-** | **-** | 6 | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
| Разом за розділом 3 | **10** | **2** | **2** | - | - | **6** | - | - | - | - | - | - |
| **Розділ 4**. **Випадкові величини.**  **Основні закони розподілу випадкових величин** | | | | | | | | | | | | |
| Тема 4.1. Поняття випадкової величини. Види випадкових величин. Закони розподілу випадкових величин | 8 | 2 | 2 | **-** | **-** | 4 | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
| Тема 4.2. Числові характеристики випадкових величин | 6 | 2 | 2 | **-** | **-** | 2 | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
| Разом за розділом 4 | **14** | **4** | **4** | - | - | **6** | - | - | - | - | - | - |
| **Розділ 5**. **Граничні теореми теорії ймовірностей** | | | | | | | | | | | | |
| Тема 5.1. Граничні теореми теорії ймовірностей | 10 | 2 | 2 | **-** | **-** | 6 | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
| Разом за розділом 5 | **10** | **2** | **2** | - | - | **6** | - | - | - | - | - | - |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Розділ 6**. **Основні поняття математичної статистики.**  **Статистичний розподіл** | | | | | | | | | | | | |
| *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | *11* | *12* | *13* |
| Тема 6.1. Предмет і задачі математичної статистики | 10 | 2 | 2 | **-** | **-** | 6 | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
| Разом за розділом 6 | **10** | **2** | **2** | - | - | **6** | - | - | - | - | - | - |
| **Розділ 7**. **Статистичні оцінки параметрів розподілу** | | | | | | | | | | | | |
| Тема 7.1. Основи теорії оцінювання невідомих параметрів розподілів | 6 | 2 | 2 | **-** | **-** | 2 | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
| Разом за розділом 7 | **6** | **2** | **2** | **-** | **-** | **2** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
| **Розділ 8**. **Основи кореляційного аналізу** | | | | | | | | | | | | |
| Тема 8.1. Типи зв’язку між випадковими величинами | 4 | 2 | 2 | **-** | **-** | - | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
| Тема 8.2. Нелінійна кореляція | 6 | 2 | 2 | **-** | **-** | 2 | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
| Разом за розділом 8 | **10** | **4** | **4** | - | - | **2** | - | - | - | - | - | - |
| **Розділ 9**. **Перевірка статистичних гіпотез** | | | | | | | | | | | | |
| Тема 9.1. Статистична гіпотеза. Критерій. Статистична перевірка гіпотез про ймовірність | 6 | 2 | 2 | **-** | **-** | 2 | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
| Разом за розділом 9 | **6** | **2** | **2** | - | - | **2** | - | - | - | - | - | - |
| Контрольна робота | **2** | - | **2** | - | - | - |  |  |  |  |  |  |
| **Усього годин** | **90** | **24** | **24** | - | - | **42** | - | - | - | - | - | - |

**4. Програма начальної дисципліни**

**4.1 Аудиторні заняття**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № заняття | Вид заняття | Тематика, зміст занять | Література |
| *1* | *2* | *3* | *4* |
| 1 | Лекція | Комбінаторика. Правила суми і добутку. | [1], с. 4-10 |
| 2 | Практичне заняття | Розв’язування вправ. | [1], с.10-12 |
| 3 | Лекція | Предмет теорії ймовірностей. Класифікація подій. Алгебра подій. | [1], 13-19 |
| 4 | Лекція | Умовна ймовірність. Теореми додавання і множення ймовірностей. | [1], 21-26 |
| 5 | Практичне заняття | Розв’язування вправ. | [1], с.30-35 |
| 6 | Лекція | Формула Бернуллі. Найімовірніше число «успіхів» у схемі Бернуллі. | [1], с.38-39 |
| 7 | Практичне заняття | Розв’язування задач. | [1], с.43 |
| *1* | *2* | *3* | *4* |
| 8 | Лекція | Поняття випадкової величини. Функція розподілу випадкової величини. Дискретні випадкової величини. Неперервні випадкової величини. | [1], с.44-54 |
| 9 | Практичне заняття | Розв’язування вправ. | [1], c. 64 |
| 10 | Лекція | Числові характеристики неперервних випадкових величин. | [1], c.58-64 |
| 11 | Практичне заняття | Розв'язування вправ. Самостійна робота. | [1], c.76-79 [2], c.135-140 |
| 12 | Лекція | Закон великих чисел. Центральна гранична теорема. | [1], c.74-76 |
| 13 | Практичне заняття | Розв’язування вправ. | [1], c.80 |
| 14 | Лекція | Предмет і задачі математичної статистики. Генеральна сукупність та вибірка. Емпірична функція розподілу. Полігон. Гістограма. | [3],c. 4-15 |
| 15 | Практичне заняття | Розв’язування вправ. Самостійна робота. | [3],c. 15-16 |
| 16 | Лекція | Точкові оцінки параметрів розподілу. Оцінка ймовірності події через частоту. | [3],c. 17-20 |
| 17 | Практичне заняття | Розв’язування вправ. | [3],c. 35 |
| 18 | Лекція | Типи зв’язку між випадковими величинами. Лінійна кореляція. | [3],c.37-46 |
| 19 | Лекція | Нелінійна кореляція. Гіперболічна кореляція. Параболічна кореляція. | [3],c.46-55 |
| 20 | Практичне заняття | Розв’язування вправ. | [3],c.55 |
| 21 | Практичне заняття | Розв’язування вправ. Самостійна робота. | [3],c.35-36 |
| 22 | Лекція | Поняття статистичної гіпотези, критерія і критичної області. Статистична перевірка гіпотез про ймовірність. Критерій узгодження Х2 Пірсона. | [3],c.58-78 |
| 23 | Практичне заняття | Розв’язування вправ. | [3],c.81-82 |
| 24 | Підсумкове заняття | Розв'язування вправ. Контрольна робота. |  |

**4.2 Самостійна робота**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №  з/п | Назва теми | Кількість  Годин |
| *1* | *2* | *3* |
| 1 | Випадкові події та операції над ними. | 4 |
| 2 | [Класичне означення ймовірності та геометрична ймовірність](#_2.__) | 2 |
| 3 | [Елементи комбінаторики](#_3.__) | 2 |
| 4 | [Теореми додавання ймовірностей для сумісних і несумісних подій 21](#_4.__) | 2 |
| 5 | [Умовна ймовірність та повна група подій 26](#_5.__) | 2 |
| 6 | [Формули множення ймовірностей для залежних і незалежних випадкових подій 32](#_6.__) | 4 |
| 7 | [Формула повної ймовірності 37](#_7._Формула_повної) | 4 |
| 8 | [Формула Байєса](#_8.__) 41 | 2 |
| 9 | [Формула Бернуллі 47](#_9._Формула_Бернуллі) | 6 |
| 11 | [Локальна та інтегральна теореми Лапласа 53](#_10._Локальна_та) | 6 |
| 12 | [Числові характеристики дискретних випадкових величин 58](#_11.__) | 6 |
| 13 | [Функція розподілу, щільність. Числові характеристики неперервних випадкових величин 66](#_12.__) | 4 |
|  | [Вибірковий метод 72](#_13.__) |  |
|  | [Точкові оцінки параметрів розподілу 84](#_14.__) |  |
|  | **Разом** | **42** |

**4.3 Консультації**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №  з/п | Тема,зміст | Кількість  Годин |
| *1* | *2* | *3* |
|  | Розв’язування задач по темі ”Елементи комбінаторики” | 1 |
|  | Розв’язування задач по темі “Випадкові події та ймовірності. Основні теореми теорії ймовірностей” | 1 |
|  | Розв’язування задач по темі “Випадкові величини. Основні закони розподілу випадкових величин.” | 1 |
| 4. | Розв’язування задач по темі “Статистичні оцінки параметрів розподілу.” | 1 |
| 5. | Розв’язування задач по темі “Основи кореляційного аналізу” | 1 |
| 6. | Розв’язування задач по темі “Перевірка статистичних гіпотез” | 1 |
|  | **Разом** | **6** |

**5. Методи навчання**

1. За джерелом інформації. Словесні: лекція (традиційна, проблемна), із застосуванням комп’ютерних технологій практичні роботи, пояснення. Наочні: спостереження, ілюстрація, демонстрація. Практичні: вправи.

2. За логікою передачі і сприймання навчальної інформації: індуктивні, дедуктивні, аналітичні, синтетичні.

3. За ступенем самостійності мислення: репродуктивні, пошукові, дослідницькі.

4. За ступенем керування навчальною діяльністю: під керівництвом викладача, самостійна робота студентів з книгою, виконання індивідуальних завдань.

5. Методи стимулювання інтересу до навчання: навчальні дискусії, створення ситуації пізнавальної новизни, створення ситуації зацікавленості (метод цікавих аналогій тощо), інтерактивні методи.

**6. Методи контролю**

Методи усного контролю: індивідуальне опитування, фронтальне опитування, бесіда.

Методи письмового контролю: контрольні роботи, індивідуальні завдання.

Методи самоконтролю: здатність самостійно оцінювати свої знання, самоаналіз.

**8. Рекомендована література**

**Базова**

1. Бугір М. К. Посібник з теорії ймовірності та математичної статистики: Навч. посіб. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 176 с.
2. Жалдак М.І. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології: Навч. посіб. / М. І. Жалдак, Н. М. Кузьміна, С. Ю. Берлінська. – К.: Вища школа, 1995. – 351с.
3. Збірник задач з теорії ймовірностей: Навч. посіб. – Львів: Видавництво Львівського університету, 2000. – 244 с.
4. Іванюта І. Д. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посіб. / І. Д. Іванюта, В. І. Рибалка, І. А. Рудоміно-Дусятська. – К.: Слово, 2003. – 272 с.
5. Каніовська І. Ю. Теорія ймовірностей у прикладах і задачах: Навч. посіб. – 2-ге вид., виправ. І доп. – К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», ТОВ «Фірма «Періодика», 2004. – 156 с.
6. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. посіб. / Г. І. Білущак, І. О. Бобик, О. З. Ватаманюк та ін. – Львів: Видавництво Львівського університету, 2003. – 244 с.
7. Турчин В. М. Теорія ймовірностей: Основні поняття, приклади, задачі: Навч. посіб. – Київ.: А. С. К., 2004. – 208 с.

**Допоміжна**

1. Валь О. Д. Теорія ймовірностей … від найпростішого: Навч. посіб. / О. Д. Валь, С. В. Мельничук, С. Л. Королюк. – Чернівці: Книги ХХІ, 2004. – 160с.
2. Елементи теорії випадкових процесів: Навч. посіб. / Г. І. Білущак, П. П. Костробій, О. Ю. Лозинський, Д. В. Уханська. – Львів: Видавництво Львівського університету, 2004. – 240 с.
3. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Глав. ред.. физ.-мат. лит-ры, 1985. – 640 с.

**9. Інформаційні ресурси**

* 1. http://google.com.ua/
  2. <http://dls.ksu.kherson.ua/dls/Library/>
  3. http://library.iapm.edu.ua/
  4. <http://uk.wikibooks.org/>
  5. Теорія ймовірностей і математична статистика – електронний навчально-методичний комплекс, розміщений у віртуальному навчальному середовищі Хмельницького політехнічного коледжу Національного університету «Львівська політехніка»

**Зміст**

[Вступ](#_Вступ) 16

[1. Випадкові події та операції над ними](#_1._Випадкові_події) 17

[2. Класичне означення ймовірності та геометрична ймовірність](#_2.__) 22

[3. Елементи комбінаторики](#_3.__) 28

[4. Теореми додавання ймовірностей для сумісних і несумісних подій](#_4.__) 33

[5. Умовна ймовірність та повна група подій](#_5.__) 38

[6. Формули множення ймовірностей для залежних і незалежних випадкових подій](#_6.__) 44

[7. Формула повної ймовірності](#_7._Формула_повної) 49

[8. Формула Байєса](#_8.__) 53

[9. Формула Бернуллі](#_9._Формула_Бернуллі) 59

[10. Локальна та інтегральна теореми Лапласа](#_10._Локальна_та) 65

[11. Числові характеристики дискретних випадкових величин](#_11.__) 70

[12. Функція розподілу, щільність. Числові характеристики неперервних](#_12.__)

[випадкових величин](#_12.__) 78

1. [Вибірковий метод](#_13.__) 84
2. [Точкові оцінки параметрів розподілу](#_14.__) 96
3. [Інтервальні оцінки параметрів розподілу](#_15.__) 105

[Список рекомендованої літератури 1](#_Список_використаної_літератури)12

[Додатки 1](#_ДОДАТОК__)13Вступ

Методи теорії ймовірностей часто застосовуються в різних сферах науки і техніки: в теорії надійності, теорії масового обслуговування, в теоретичній фізиці, геодезії, астрономії, теорії помилок спостережень, теорії автоматичного управління, загальній теорії зв’язку та вбагатьох інших науках. Теорія ймовірностей є підґрунтям для математичної і прикладної статистики, яка в свою чергу використовується при плануванні та організації виробництва, в аналізі технологічних процесів, у психології, медицині та вибірковому контролі.

У зв’язку з тим, що економічна інформація є не досить точною і часто носить випадковий характер, переважна більшість економічних задач моделюється за допомогою ймовірнісних чи статистичних методів. Способи побудови таких найпростіших моделей розглядаються в курсі теорії ймовірностей і математичної статистики.

Методичні рекомендації мають на маті ознайомити студентів вищих навчальних закладів І-ІІ рівня акредитації з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії ймовірностей та математичної статистики, допомогти їм набути первинні навички застосування теоретичного матеріалу в прикладних задачах.

Знання закономірностей, яким підпорядковуються масові випадкові події, дозволяє передбачити, як ці події будуть розвиватися, оскільки досить велика кількість однорідних випадкових подій незалежно від їх конкретної природи підпорядковуються деяким закономірностям, а саме – ймовірносним.

Розв’язування наведених задач потребує глибокого опанування матеріалу: необхідно запропонувати ту чи іншу математичну модель, вибрати метод розв’язання задачі, обґрунтувати вибір, дати інтерпретацію отриманих результатів.

Методична розробка складається з 15 розділів, де наведено основні поняття теорії ймовірностей та математичної статистики, включає розв’язок типових задач та задачі для самостійного опрацювання.

#### Випадкові події та операції над ними

*Самостійна робота* - 6 год.

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

**Методичні вказівки.**

**Випадковою** називається подія, яка при розглянутих умовах може відбутися або не відбуватися.

Кожному експерименту з випадковими результатами (наслідками) відповідає певна множина  елементарних подій, кожна з яких відбувається внаслідок його проведення: . Множину  називають **простором елементарних подій**. Він може бути як дискретним, так і неперервним. Якщо множина є зліченною, тобто всі елементи множини можна пронумерувати або перерахувати,то простір елементарних подій називають дискретним. Інакше (коли кожній елементарній події не можна поставити у відповідність певне натуральне число) простір елементарних подій називають неперервним.

Дві множини А і В називаються рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів.

**Сумою** двох подій А і В називається така подія  (), яка в наслідок експерименту відбувається з настанням принаймні однієї з подій А або В.

Операція  називається об’єднанням цих подій.

**Добутком** двох подій А і В називається така подія  (),яка внаслідок експерименту відбувається з одночасним настанням подій А і В.

Операція  називається перетином цих подій.

**Різницею** двох подій А і В називається подія , яка внаслідок експерименту відбувається з настанням події А і одночасним настанням події В.

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 1.1*. Монету підкидають чотири рази. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту і такі випадкові події:

1. А – герб випаде двічі;
2. В – герб випаде не менш як тричі.

*Розв’язання*. Шуканий простір елементарних подій:



1. А= {};
2. В= {}.

*Приклад 1.2*. Провести операції об’єднання, перетину та віднімання над числовими множинами:

А={1;3;5;7;9}, В= {1;2;3;4;5}, С={2;4;6;8;10}.

*Розв’язання*. ={1;2;3;4;5;7;9}; ={1;2;3;4;5;6;7;8;9;10};

={}; ={1;3;5};

= {7;9}; ={2;4};

С={1;3;5;7;9}.

**Задачі**

* 1. Монету підкидають тричі. Визначити простір елементарних подій цього експерименту.
  2. Задано дві множини цілих чисел ={1;2;3}, ={1;2;3;4}. Із кожної множини навмання беруть по одному числу. Визначити елементарні події цього експерименту – появу пари чисел.
  3. Стрілок робить один постріл у мішень, поділену на три області. Позначимо: - влучення у першу область,  - влучення у другу область,  - влучення у третю область,  - немає влучень у мішень, В - влучення у першу або другу області, D - влучення хоча б в одну область. Записати події В і D.
  4. Стрілок стріляє двічі по мішені. Описати простір елементарних подій та записати подію, яка полягає в тому, що:

1. Стрілок влучив у мішень принаймні один раз.
2. Стрілок влучив рівно один раз.
3. Стрілок не влучив у мішень.
   1. Задано множину цілих чисел  ={1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12}. Навмання з цієї множини беруть одне число, Побудувати такі випадкові події:
4. З’явиться число, кратне 2.
5. З’явиться число, кратне 3.
6. З’явиться число, кратне 5.
   1. Задано множину цілих чисел  ={1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15}. Навмання з цієї множини беруть одне число. Побудувати такі випадкові події:
7. А – узяте число, кратне 2.
8. В – узяте число, кратне 3.

Визначити: , , .

* 1. Нехай A, B, C – дві довільні події. Знайти вираз для події D, яка полягає в тому, що відбулися хоча б дві з них.
  2. Прилад складається з двох блоків першого типу і трьох блоків другого типу. Подія  полягає в тому, що придатний до роботи і-й блок першого типу, –придатний до роботи і-й блок другого типу.Прилад працює, якщо придатний до роботи хоча б один блок першого типу і не менш ніж два блоки другого типу.Виразити подію “прилад працює” через дві події  і .
  3. З гармати зроблено два постріли. Подія А – влучення при першому пострілі; В – влучення при другому пострілі. Що означає подія А+В?

1.10. Дано множини цілих чисел: А={1;2;3}, В={3;4}. Знайти , , .

1.11. Дві особи стріляють у мішень по одному разу. Подія А означає, що в мішень влучив перший стрілок, В – другий стрілок. Виразити через А іВ такі події:

1. С – два влучення у мішень;
2. D – хоча б одне влучення у мішень;
3. E – лише одне влучення у мішень.

1.12. A, B, C – випадкові події. Записати наступні події:

1. Відбулася лише А.
2. Відбулися лише А і В.
3. Відбулися всі три події.
4. Відбулася хоча б одна подія.
5. Відбулася тільки одна подія.
6. Не відбулося жодної події.
7. Відбулися тільки дві події.
8. Відбулися хоча б дві події.

1.13. Маємо такі події: А – навмання взята деталь першого сорту, В – навмання взята деталь другого сорту, С – навмання взята деталь третього сорту.Пояснити, що означають події , , , .

1.14. Дано множини цілих чисел: А={1;3;5;7;9}, В={1;2;3;4;5}, С={1;4;6;8;10}. Знайти, , , , .

1.15. Дано множини цілих чисел: А={-1;-2;-3;-4;-5;-7},В={-1;-2;-3;-4;-5;-6;-7;-8;9}, С={-2;-4;-6;-8}.Знайти, , , , ,.

1.16. Дано множини цілих чисел: А={2;4;6;10;12;14;16;18}, В={4;8;12;16;20}, С={2;4;6;8;10}.Визначте такі множини: , , , , ,.

1.17. Множина А складається з різних всеможливих очок, що утворюється при підкиданні пари гральних кубиків, а В={5;7;9}. Визначте .

1.18. Дано множини цілих чисел:*U*={4;6;8;10;12;14;16;18}, А={4;6;8;10}, В={4;8;16}. Намалюйте діаграму Венна і покажіть на ній ці підмножини.

1.19. Для множин із задачі 1.18 знайти: , , , .результати дій зобразіть графічно за допомогою діаграм Венна.

1.20. Задано такі множини: А={3;– 4}, В={*х*:(*Х*– 3)(*х*+4)=0}, *С*={*х*: *х*3+*х*2– –12*х*=0},*D*={0;–4;–3}. Які з них є рівними? Визначте усі співвідношення між цими множинами.

1.21. Підкидають монету і гральний кубик. Описати простір елементарних подій.

1.22. Підкидають монету доти, доки не випаде герб. Описати простір елементарних подій.

* 1. Які прості вирази відповідають подіям:

1. ;
2. ;
3. ?
   1. Довести рівності:
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. .

###### 2.Класичне означення ймовірності та геометрична ймовірність

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

**Методичні вказівки.**

**Ймовірність** події А дорівнюєвідношенню числа елементарних наслідків, які сприяють появі події А, до числа усіх рівноможливих елементарних наслідків:

Р(А)=,

де m–число елементарних наслідків, які сприяють появі події А;

n – число усіх рівноможливих елементарних наслідків.

Класичне означення ймовірності придатне лише дляекспериментів з обмеженим числом рівноможливих подій, тобто  - обмежена.

Якщо множина є неперервною і квадровною, то для обчислення ймовірності А () використовується **геометрична** ймовірність:

Р(А)=).

Якщо множина  (G) вимірюється в лінійних одиницях, то Р(А) дорівнює відношенню довжин, якщо у квадратних одиницях – то відношенню площ і т. ін.

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 2.1.*  Вказати помилку розв’язку задачі: “Підкидаємо два гральні кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок, які випали, дорівнює чотирьом (подія А).”

*Розв’язок.* Усього можливі два виходи з даного випробування: сума очок, що випали, дорівнює чотирьом або не дорівнює. Подію А задовольняє один вихід, а загальне число виходів дорівнює двом. Відповідно Р(А)=1/2.

*Розв’язання*. Помилка розв’язку полягає в тому, що виходи, які розглядаються, не є рівноможливими.

*Правильний розв’язок*.Загальна кількість рівноможливих виходів дорівнює 6⋅6=36 (кожне число, що випало на одному гральному кубику, може бути в парі з усіма числами іншого грального кубика). Серед цих виходів сприяють події А тільки три виходи: (1;3),(3;1),(2;2). Відповідно, шукана ймовірність Р(А)==.

*Приклад 2.2. (Задача про зустріч)*. Дві особи домовилися про зустріч на заданому проміжку часу . Особа, що прийшла першою, чекає протягом часу а<ε. Яка ймовірність зустрічі?

*Розв’язання.* За множину елементарних подій візьмемо квадрат зі стороною  і точками (*x; y*), що зображують час зустрічі. Тоді , . Сприятливі наслідки утворюють точки, для яких . Тобто точки смуги між прямими ,. Площа цієї смуги . Тоді шукана ймовірність визначається так:

Р(А)=.

**Задачі**

2.1. У ящику міститься 15 однотипних деталей, із яких 6 бракованих, а решта стандартні.Навмання із ящика беруть одну деталь. Яка ймовірність того, що вона стандартна?

2.2. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність того, що на грані кубика з’явиться число, кратне 3?

2.3. Два гральні кубики підкидають по одному разу. Побудувати простір елементарних подій і такі випадкові події: А – сума цифр кратна чотирьом; В – сума цифр кратна трьом. Обчислити Р(А), Р(В), Р(АВ).

2.4. У кожній із трьох урн містяться червоні та сині кульки. Із кожної урни беруть по одній кульці. Побудувати простір елементарних подій і такі випадкові події: А – серед трьох навмання взятих кульок дві виявляться червоного кольору; В – серед трьох навмання взятих кульок дві виявляться синього кольору. Обчислити Р(А), Р(В), Р(АВ).

2.5. В електричну мережу увімкнено чотири електролампочки. При проходженні електричного струму в мережі кожна лампочка з певною ймовірністю може перегоріти або ні. Побудувати простір елементарних подій і такі випадкові події: А – із чотирьох лампочок перегорить не менш як три; В – із чотирьох лампочок перегорить не більш як дві. Обчислити Р(А), Р(В), Р(АВ) .

2.6. Набираючи телефонний номер, абонент забув одну цифру і набрав її навмання. Знайти ймовірність того, що цифра набрана вірно.

2.7. Учасники жеребкування тягнуть із ящика жетони з номерами від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що номер першого навмання взятого жетону не містить цифри 5.

2.8. Перевозили ящик, в якому було 21 стандартна і 10 нестандартних деталей, при цьому втратили одну деталь, але невідомо яку. Навмання взята (після перевезення) деталь виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що була втрачена: 1) стандартна деталь; 2) нестандартна деталь.

2.9. Задумане двозначне число, цифри якого різні. Знайти ймовірність того, що задуманим числом виявиться: 1) випадково назване двозначне число, цифри якого різні; 2) випадково назване двозначне число.

2.10. Кинули два гральних кубики. Знайти ймовірність наступних подій подій: 1) сума очок дорівнює вісім, а різниця чотири; 2) сума очок дорівнює вісім, якщо відомо, що їх різниця дорівнює чотири.

2.11. Монету підкидаємо два рази. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз з’явиться герб.

2.12. Підкинули два гральні кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок на гранях дорівнює сім.

2.13. По трубопроводу між пунктами А і В перекачують нафту. Знайти ймовірність того, що через певний час роботи трубопроводу пошкодження станеться на ділянці, довжиною 100 метрів, якщо відстань від А до В – 2 кілометри.

2.14. Задана множина . Знайти ймовірність того, що навмання взяті два числа (x;y) утворюють координати точки, яка влучить в область А=.

2.15. На відрізок ОА довжини L числової вісі ОX навмання поставлена точка B(x). Знайти ймовірність того, що менший із відрізків ОВ і ВА має довжину 

2.16. На площині накреслені два круги, радіуси яких 5 і 10 см відповідно. Знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання у великий круг, попаде в кільце, яке утворилось даними кругами.

2.17. Два туристичні пароплави повинні причалити до одного причалу. Час прибуття обох пароплавів рівноможливий на протязі доби. Знайти ймовірність того, що одному з пароплавів доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого пароплава дорівнює одній годині, а другого – дві години.

2.18. Дана множина U=. Знайти ймовірність того, щонавмання взята точка з координатами (x,y) буде знаходитись в області А, обмеженою кривими  і .

2.19. Площина розграфлена паралельними прямими, які знаходяться одна від одної на відстані 2а. На площину навмання кинули монету радіусом . Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодну з прямих.

2.20. Маємо диск, що швидко обертається, і він поділений на парну кількість рівних секторів, які почерзі пофарбовані в білий і чорний колір. По диску зробили постріл. Знайти ймовірність того, що було попадання в один із білих секторів. Ймовірність попадання в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури.

2.21.500 фірм отримали кредити в банку. Банк класифікує кожен кредит за двома характеристиками: сума кредиту і термін кредиту (в місяцях). Відповідну класифікацію наведено в табл. 2.1.

*Таблиця 2.1*

Вихідні дані для задачі 2.21

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Термін кредиту (місяці)* | *Сума кредиту* | | | |
| < $2000 | $2000 – 4999 | $5000 – 7999 | > $8000 |
| 12 | 30 | 2 | 0 | 0 |
| 24 | 4 | 20 | 5 | 0 |
| 36 | 1 | 20 | 86 | 5 |
| 42 | 0 | 31 | 99 | 37 |
| 48 | 0 | 0 | 110 | 50 |

Для перевірки навмання вибирається одна фірма:

а) Яка ймовірність того, що сума кредиту цієї фірми не менша $5000?

б) Яка ймовірність того, що термін кредиту фірми більший двох років?

в) Яка ймовірність того, що фірма взяла кредит на суму, не меншу $2000, на 42 місяці?

2.22. Вкладники банку за сумами вкладів та віком мають такий процентний розподіл (див. табл. 2.2).

*Таблиця 2.2*

Вихідні дані для задачі 2.22

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Вік* | *Суми вкладу* | | |
| < $1000 | $1000 – 5000 | > $5000 |
| < 30 років | 5 % | 15% | 8 % |
| 30 – 50 років | 8 % | 25% | 20 % |
| > 50 років | 7 % | 10% | 2 % |

Нехай А та В – такі події:

*А =* {у навмання вибраного клієнта вклад більший $5000};

*В =* {вік навмання вибраного клієнта більший 30 років}.

Визначити: *Р(А), Р(В), Р(А**В), Р(АВ).*

2.23. У супермаркеті, аналізуючи 10 000 покупок за типом товарів і типом розрахунків (готівка чи кредитна картка), виявлено такий процентний розподіл (див. табл. 2.3).

*Таблиця 2.3*

Вихідні дані для задачі 2.23

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Тип*  *розрахунку* | *Тип товару, %* | | | |
| Жіночий одяг | Чоловічий одяг | Спортивні товари | Господарчі товари |
| Каса | 6 | 9 | 3 | 7 |
| Кредитна картка | 41 | 9 | 22 | 3 |

Нехай А, Б, С*,*D*–* такі події:

*А =*{навмання вибраний рахунок, сплачений кредитною карткою};

*В =*{навмання вибраний рахунок за жіночий одяг};

*С =* {навмання вибраний рахунок за чоловічий одяг};

D*=* {навмання вибраний рахунок за спортивні товари}.

Обчислити *Р(А), Р* (ВА), *Р (А*), *Р (АВ), Р(А*С).

### 3. Елементи комбінаторики

Самостійна робота - год.

*Зміст*:

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

*Література*:

**Методичні вказівки.**

**Перестановками** із nелементів називаються такі впорядковані множини з nелементів, які різняться між собою порядком розміщення. Кількість таких перестановок обчислюється за формулою:



де n – ціле невід’ємне число.

**Розміщенням** із nелементів по m  називаються такі впорядковані множини, які складаються з m елементів, взятих із даних n і відрізняються як порядком, так і елементами. Кількість таких перестановок обчислюється за формулою:

.

**Комбінаціями** із n елементів по m  називаються такі множини m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом. Кількість таких комбінацій обчислюється за формулою:

.

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 3.1.* Скількома способами можна посадити за одним столом 5 студентів?

*Розв’язання*. На перший стілець можна посадити будь-кого з 5 студентів, на другий будь-кого з 4, що лишилися. На третій – будь-кого з трьох, на четвертий – будь-кого з двох, на п’ятий – одного. Отже: . Є 120 різних способів, якими можна посадити за одним столом 5 студентів.

*Приклад 3.2.* Обчислити число варіантів п’ятиденного розкладу занять студента по 3 пари щодня, якщо вивчається 15 різних дисциплін і протягом тижня кожна з них повинна вивчатися.

*Розв’язання.* Розв’язок задачі зводиться до знаходження числа розміщень з 15 елементів по 3: . Тобто, існує 2730 варіантів розкладу.

*Приклад 3.3.* У лотереї є 36 елементів, з яких виграшними є 5. Скільки існує всіх різних комбінацій вибору цих 5 виграшних елементів(“Спортлото 5 із 36” )?

*Розв’язання.* Для обчислення всіх можливих варіантів обчислимо число комбінацій з 36 елементів по 5: 

**Задачі**

3.1. Скільки п’ятизначних чисел можна записати, використовуючи п’ять різних цифр ( крім нуля )?

3.2. На кожній із шести однакових карток записано одну літеру Я, І, Т, Е, Р, О. Знайти ймовірність того, що картки навмання розкладені у рядок, утворять слово “теорія”?

3.3. Задано множину цілих чисел  Її елементи навмання розставлені у рядок. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

А – розставлені у ряд числа утворюють зростаючу послідовність;

В – розставлені у ряд числа утворюють спадну послідовність;

С – цифра 1 стоятиме на першому місці, а 5 – на останньому;

D – цифри утворять парне п’ятицифрове число.

3.4. Скільки трьохзначних чисел можна скласти з цифр 1,2,3, якщо кожна цифра входить в зображення числа тільки один раз?

3.5. Маємо дев’ять однакових за розміром карток, на кожній з яких записано одну з цифр: 1,2,…,9. Навмання беруть чотири картки і розкладають в один рядок. Знайти ймовірність того, що при цьому дістанемо 1973.

3.6. У кімнаті перебуває 10 студентів. Знайти ймовірність того, що два і більше студенти не мають спільного дня народження.

3.7. Набираючи телефонний номер, абонент забув останні дві цифри і, пам’ятаючи лише, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано вірні цифри.

3.8. Студенти другого курсу згідно з учбовим планом вивчають 10 дисциплін. На один день можна планувати заняття з 4 дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на день?

3.9. У цеху працює 10 верстатів, кожен з яких з певною ймовірністю може перебувати в роботоздатному стані або ні. Знайти ймовірність того, що під час роботи верстатів із ладу вийдуть 3 з них.

3.10. У шухляді міститься 10 однотипних деталей, 6 із яких стандартні, а решта – браковані. Навмання із шухляди беруть чотири деталі. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

А – чотири деталі виявляться стандартними;

В – чотири деталі виявляться бракованими;

С – із чотирьох деталей будуть дві стандартні і дві браковані.

3.11. Маємо колоду з 52 карт. З неї навмання дістаємо 6 карт. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

А – із 6 карт будуть 3 червоні і 3 чорні;

В – дістанемо 1 туз, 1 даму, а королів не буде взагалі;

С – буде 1 чорний туз;

D – буде хоча б один туз.

3.12. В гості прийшло n людей в калошах. Потім кожен з них навмання бере по дві. Знайти ймовірність того, що всі вони візьмуть праву і ліву.

3.13. Є 15 пасажирів і 4 вагони. Знайти ймовірність того, що: а) в першому вагоні два пасажири, в другому – три, в третьому – чотири, в четвертому – шість пасажирів; б) в першому вагоні буде сидіти чотири пасажири; в) в першому вагоні – два пасажири, а в другому – три.

3.14. Випустилиn лотерейних білетів, з них m виграшних. Знайти ймовірність виграшу для того, хто купив kбілетів.

3.15. Є 10 чоловік. Знайти ймовірність того, що всі 10 чоловік народилися в різні місяці.

3.16. В цеху працює 6 чоловіків і 4 жінки. За табельними номерами навмання відібрали 7 чоловік. Знайти ймовірність того, що серед них буде три жінки.

3.17. Знайти ймовірність того, що при підкиданні трьох гральних кубиків шістка випаде на одному (немає значення, на якому) кубику, якщо на двох інших кубиках випадає різне число очок (не рівне шести).

3.18. В пачці 20 дисків, помічених номерами 101, 102,…,120. Оператор навмання витягує два диска. Знайти ймовірність того, що будуть витягнуті диски із номерами 101 і 120.

3.19. На складі є 15 кінескопів, причому 10 з них виготовлені на Львівському заводі. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання взятих кінескопів три виявляться Львівського заводу.

3.20. Велика науково-дослідна фундація розглядає вкладення коштів у дослідницькі медичні проекти. Було розглянуто 20 проектів і 8 з них отримали кошти. Яка кількість різних проектів може бути профінансована?

3.21. У камері схову встановлено кодовий замок, шифр якого складається з чотирьох цифр. Скільки різних комбінацій може бути з цифр 1,2,3,4,5, якщо:

а) цифри в коді можуть повторюватися;

б) цифри в коді не повторюються;

в) код починається з цифри 3 ;

г) код є парним числом;

д) код – парне число, цифри якого не повторюються?

3.22. З Києва до Одеси можна вибрати один із 4 залізничних або один із 3 автобусних рейсів. Скільки є варіантів здійснити подорож за маршрутами:

а) Київ – Одеса;

б) Київ – Одеса – Київ;

в) Київ – Одеса – Київ, якщо зворотній шлях провести у поїзді?

3.23. На вершину гори веде 7 доріг. Скількома способами турист може піднятися на гору і спуститися з неї? Дати відповідь на те ж запитання, якщо підйом та спуск здійснювати різними шляхами.

3.24.Скільки є п’ятизначних чисел, які діляться на п’ять?

3.25. На одній із бічних сторін трикутника взято n точок, на другій – m точок. Кожну вершину при основі трикутника сполучено прямими з точками, взятими на протилежній бічній стороні. На скільки частин поділиться трикутник проведеними прямими?

3.26. У розіграші чемпіонату країни з футболу беруть участь 17 команд. Скількома способами може бути розподілено золоту, срібну і бронзову медалі?

3.27. Автомобільний номер складається з двох букв і чотирьох цифр. Знайти кількість усіх можливих номерів, які можна скласти з цифр від 0 до 9 та 30 букв українського алфавіту?

3.28. З 12 чоловік кожного дня протягом 6 днів вибирають 2 чергових. Визначити кількість різних списків чергових, якщо кожна особа чергує лише один раз.

### 4. Теореми додавання ймовірностей для сумісних і несумісних подій

Самостійна робота - год.

*Зміст*:

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

*Література*:

**Методичні вказівки.**

Події називаються **сумісними**, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших ( не обов’язково одночасно ).

Події називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному і тому ж випробуванні.

Ймовірність появи однієї з двох випадкових несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей:



Дане твердження справджується і для nвипадкових подій.

Якщо випадкові події А та В сумісні, то ймовірність їх об’єднання дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їх сумісної появи:



Дане твердження також справджується і для nвипадкових подій.

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 4.1.* В урні знаходиться 30 кульок: 10 червоних і 15 білих. Навмання витягуємо одну кульку. Знайти ймовірність того, що вона буде кольоровою.

*Розв’язання*.Поява кольорової кульки означає появу або червоної, або синьої кулі. Ймовірність появи червоної кулі (подія А):

Р(А)= .

Ймовірність появи синьої кулі (подія В):

Р(В)= .

Події А та В несумісні (поява кулі одного кольору виключає появу кулі іншого кольору), тому застосовуємо теорему додавання ймовірностей для несумісних подій:



*Приклад 4.2.* Ймовірність попадання в ціль, якщо стріляти із першої і другої гармати, відповідно дорівнює . Знайти ймовірність влучення при одному залпі хоча б однією із гармат.

*Розв’язання*. Ймовірність влучити в ціль кожною із гармат не залежить від результату пострілу з іншої гармати, тому подія А (влучення першої гармати) і В (влучення другої гармати) незалежні, тому застосовуємо теорему додавання ймовірностей для сумісних подій:

,

де .

Отже, шукана ймовірність .

**Задачі**

4.1. Задано множину цілих чисел {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16, 17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30}. Навмання з цієї множини беруть одне число.Знайти ймовірність того, що воно виявиться кратним 5 або 7.

4.2. Садівник восени посадив 10 саджанців яблуні. Кожен із саджанців може прийнятися або ні з певною ймовірністю. Знайти ймовірність того, що з 10 саджанців навесні наступного року приймуться 6 або 2.

4.3. У ящику міститься 13 однакових деталей, серед яких 5 бракованих, а решта – стандартні. Навмання з ящика беруть чотири деталі. Знайти ймовірність того, що всі чотири деталі виявляться стандартними або бракованими.

4.4 В урні містяться 30 однакових кульок, які пронумеровані від 1 до 30. Навмання з урни беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що номер кульки виявиться кратним 3 або 5.

4.5. Чотири спортсмени мають виконати норму майстра спорту. Кожен з них може виконати її з певною ймовірністю. Знайти ймовірність того, що із чотирьох спортсменів норму майстра спорту виконають не менш як два спортсмени; не більш як три.

4.6. Випадкові події А1,А2 ,А3 ,А4 є попарно несумісні і утворюють повну групу подій. Знайти Р(А1), Р(А2), Р(А3), Р(А4), коли відомо, що Р(А1)=0,2⋅Р(А2), Р(А2)=0,8⋅Р(А3), Р(А3)=0,5⋅Р(А4).

4.7. У залежності від наявності сировини підприємство може виробити та відправити замовникам щодобово кількість певної продукції від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що одержану кількість продукції можна розподілити без залишку: а) трьом замовникам; б) чотирьом замовникам; в)дванадцяти замовникам; г) трьом або чотирьом замовникам.

4.8. В урні містяться 40 кульок: 10 червоних, 15 синіх і 15 білих. Знайти ймовірність появи кольорової кульки.

4.9. Ймовірність влучити в ціль при стрільбі першої і другої гармати відповідно дорівнює:р1 = 0,5, р2 = 0,3. Знайти ймовірність влучення при одному залпі (із обох гармат) хоча б однією із гармат.

4.10. Задано множину цілих чисел {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13, 14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25}. Навмання з цієї множини беруть одне число. Знайти ймовірність того, що воно виявиться кратним 4 або 8.

4.11. Три студенти можуть здати екзамен з математики з певною ймовірністю. Знайти ймовірність того, що із трьох студентів екзамен складуть не менше як 1 і не більше ніж 2.

4.12. У ящику міститься 18 однакових деталей, серед яких 7 бракованих, а решта – стандартні. Навмання з ящика беруть п’ять деталей. Знайти ймовірність того, що всі п’ять деталей виявляться стандартними або бракованими.

4.13. Відомо, що А1,А2 ,А3 ,А4є попарно несумісні і утворюють повну групу подій. Знайти Р(А1), Р(А2), Р(А3), Р(А4), коли відомо, щоР(А1)=0,5⋅Р(А2)+0,8⋅Р(А3), Р(А2)+0,8⋅Р(А3)+0,2⋅Р(А4), Р(А3)=0,8⋅Р(А4).

4.14. Монета підкидається 20 разів. Знайти ймовірність того, що при цьому герб з’явиться 7 або 17 разів.

4.15. Ймовірність появи кожної із двох незалежних подій А1 і А2 відповідно дорівнює р1 і р2. Знайти ймовірність появи тільки однієї з цих подій.

4.16. Для сигналізації про аварію встановлено два незалежних сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор спрацює, дорівнює 0,95 для першого сигналізатора і 0,9 для другого. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює тільки один сигналізатор.

4.17.Студент шукає потрібну йому формулу у трьох довідниках. Ймовірність того, що формула є в першому, другому і третьому довіднику, відповідно дорівнює 0,6; 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність того, що формула є: а)лише в одному довіднику; б) тільки в двох довідниках; в) у всіх трьох довідниках.

4.18. Ймовірність того, що потрібна комплектувальнику деталь знаходиться в першому,другому, третьому і четвертому ящиках, відповідно дорівнює 0,6; 0,7; 0,8 і 0,9. Знайти ймовірність того, що деталь міститься: а)не більш ніж в трьох ящиках; б)не менш ніж в двох ящиках.

4.19. На стелажі бібліотеки випадковим чином поставили 15 підручників, причому 5 з них в твердій обкладинці. Бібліотекар бере навмання три підручники. Знайти ймовірність того, що хоча б один підручник виявиться в твердій обкладинці.

4.20. Ймовірність того, що при одному вимірі деякої фізичної величинибуде допущено помилку, яка перевищує задану точність, дорівнює 0,4. Провели три незалежні виміри.Знайти ймовірність того, що тільки в одному з них допущена помилка перевищить задану точність.

4.21. Нехай А і В – випадкові події, Р*0–* ймовірність того, що не відбудеться жодна з них, Р1– ймовірність того, що відбудеться одна і тільки одна подія, Р*2*– ймовірність того, що відбудуться обидві події. Виразити Р0, Р1, Р2через Р(А), Р(В), Р(АВ).

4.22. В одному ящику 5 білих та 10 чорних куль, в іншому – 10 білих та 5 чорних куль. Знайти ймовірність того, що хоча б з одного ящика буде витягнута одна біла куля, якщо з кожного ящика витягнули по кулі.

4.23. В ящику 10 червоних та 6 блакитних куль. Навмання витягають 2 кулі. Яка ймовірність того, що кулі будуть одного кольору?

4.24. Знайти ймовірність того, що навмання вибране двозначне число є кратним 2, або 5, або тому й іншомуодночасно.

### 5. Умовна ймовірність та повна група подій

Самостійна робота - год.

*Зміст*:

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

*Література*:

**Методичні вказівки.**

Випадкові події А та В називають **залежними**, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або непояви іншої події. В противному випадку такі події називають **незалежними**.

Декілька подій утворюють повну групу, якщо в результаті випробування з’явиться хоча б одна з них.

Сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці.

Умовною ймовірністю РА(В) називається ймовірність події В, яка обчислюється за умови, що подія А вже відбулася. Формула для обчислення умовної ймовірності має вигляд:

; .

1. РА(В)=0, якщо .
2. РА(В)=1, якщо .
3. У решті випадків .

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 5.1.* Вурні 3 білих і три чорних кулі. Із урни двічі навмання виймають по одній кулі, не повертаючи їх назад. Знайти ймовірність появи білої кулі при другому випробуванні (подія В), якщо при першому випробуванні витягли чорну кулю (подія А).

*Розв’язання*.Після першого випробування в урні лишилося 5 куль, серед яких 3 білих. Шукана умовна ймовірність РА(В)=3/5.

Аналогічний результат можна отримати за формулою:

; .

Дійсно, ймовірність появи білої кулі при першому випробуванні Р(А)=3/6=1/2. Знайдемо ймовірність  того, що в першому випробуванні з’являється чорна куля, а в другому – біла. Загальна кількість виходів – сумісної появи двох куль, неважливо якого кольору, дорівнює кількості розміщень . Із цієї кількості виходів події  сприяють  виходів. Відповідно =9/30=3/10. Отже, шукана ймовірність:

=.

*Приклад 5.2.* За статистичними даними ремонтної майстерні в середньому на 20 зупинок токарного станка припадає: 10 – для заміни різця; 3 – через несправність приводу; 2 – через несвоєчасну подачу заготовок. Інші зупинки відбуваються через інші причини. Знайти ймовірність того, що зупинка відбулася через інші причини.

*Розв’язання*. Ймовірність того, що зупинка токарного станка відбулася для заміни різця, дорівнює: Р(А)==0,5.Ймовірність того, що зламався привід, дорівнює: Р(В)==0,15. Ймовірність того, що зупинка відбулася через несвоєчасну подачу заготовок: Р(С)==0,1.Оскільки, Р(А), Р(В), Р(С) незалежні і утворюють повну групу подій з подією P(D) – зупинка відбулася через інші причини, то

Р(А)+Р(В)+Р(С)+P(D)=1.

P(D)=1–Р(А) – Р(В) – Р(С),

P(D)=1 – 0,5 – 0,15 – 0,1=0,25.

**Задачі**

* 1. В урні міститься 10 однакових кульок, із них 6 чорних і 4 білих. З урни навмання беруть дві кульки по одній без повернення. З’ясувати, чи будуть залежними такі випадкові події: перша кулька виявиться чорною і друга теж.
  2. Задана множина цілих чисел . Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратне 3, коли відомо, що воно є непарним?
  3. Відомі значення:  З’ясувати, чи є залежними випадкові події А і В.
  4. В урні 6 білих і 6 чорних кульок. Із урни двічі навмання виймають по одній кульці без повернення. Знайти ймовірність появи білої кульки при другому випробуванні, якщо при першому випробуванні витягли чорну кулю.
  5. Підкидаємо два гральні кубики. Яка ймовірність того, що випаде хоча б один раз 6 очок, якщо сума очок дорівнює 8?
  6. Три мисливці стріляють у ведмедя. При цьому ймовірність того, що влучить перший, дорівнює 0,2; другий – 0,4; третій – 0,6. Яка ймовірність того, що ведмедя вбив перший мисливець.
  7. Відомі такі ймовірності:  З’ясувати, чи є залежними випадкові події А і В.
  8. Консультаційний пункт інституту отримує пакети з контрольними роботами із міст А, В та С. Ймовірність отримати пакет із міста А дорівнює 0,7, із міста В – 0,2. Знайти ймовірність того,що наступний пакет інститут отримає із міста С.
  9. В ящику знаходиться n деталей, із них m – стандартних. Знайти ймовірність того, що серед k навмання взятих деталей є хоча б одна стандартна.
  10. За даними перепису населення (1891 р.) Англії та Уельсу встановлено: темноокі батьки і темноокі сини (АВ) склали 5% осіб, темноокі батьки і світлоокі сини  - 7,9%, світлоокі батьки і темноокі сини  - 8,9%,світлоокі батьки і світлоокі сини  - 78,2%. Знайти зв’язок між кольором очей батька і сина.
  11. Ймовірність того, що день буде дощовий, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того,що день буде сонячний.
  12. Із 100 валів з чотирма групами допусків 15 штук мають першу групу, 40 – другу, 30 – третю. Визначити ймовірність появи валів четвертої групи.
  13. Подія А може з’явитисяза умови, що з’явиться одна з несумісних подій (гіпотез) В1, В2, В3, які утворюють повну групу подій. Після появи подій А були переоцінені ймовірності гіпотез, тобто, були знайдені умовні ймовірності цих гіпотез. Виявилося, що РА(В1)=0,6; РА(В2)=0,3. Чому дорівнює умовна ймовірність РА(В3) гіпотези В3?
  14. Знайти ймовірність Р(А) за даними ймовірностями Р(АВ)=0,72, .
  15. Знайти ймовірність Р(А) за даними ймовірностями Р(А)=a, Р(В)=b, Р(АВ)=с.
  16. Знайти ймовірність Р() за даними ймовірностями Р(А)=a, Р(В)=b, Р(АВ)=с.
  17. Довести, що, де Р(А)>0.
  18. За статистичними показниками держави можна зробити висновок, що 68% чоловіків, які досягли60-ліття, досягають також і 70-ліття. Яка ймовірність того, що 60-річний чоловік не досягне свого 70-ліття?
  19. Ймовірність одержати повідомлення від певної особи на протязі доби дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що повідомлення на протязі доби від цієї особи не буде одержане?
  20. Нехай Р(А)>0 та Р(В) = Р(В). Довести, що А та В незалежні.
  21. Підкидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випаде принаймні одна трійка, якщо на всіх трьох кубиках випали різні грані?
  22. Підкидають три гральних кубики. Яка ймовірність того, що принаймні один раз випаде шістка, якщо на всіх трьох кубиках випали різні грані?
  23. З урни, в якій лежать m білих і n чорних куль, беруть послідовно дві кулі. Відомо, що перша куля біла. Яка ймовірність того, що друга куля теж буде біла?
  24. Дано: РВ (А)=0,7; Р(А)=0,3; РА(В)=0,6. Обчислити Р(А).
  25. У компанії працює 200 службовців. Розподіл їх за віком, освітою та строком роботи в компанії наведено в табл. 5.1.*Таблиця 5.1*

Вихідні дані для задачі 5.25

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Вік* | *Менше 5 років у компанії* | | *Більше 5 років у компанії* | |
| Вища освіта | Середня освіта | Вища освіта | Середня освіта |
| < 30 | 40 | 5 | 50 | 5 |
| >30 | 50 | 25 | 15 | 10 |

Навмання вибирається один службовець.

а) Яка ймовірність того, що вибрана особа має вищу освіту?

б) Якщо вибрана особа працює в компанії більше 5 років, яка ймовірність того, що її вік більше 30?

в) Нехай А та Б – такі події:А= {вибрана особа має вищу освіту}, Б*=*{вибрана особа старша 30 років}. Чи будуть події А та Б незалежними?

5.26. Фірма, що ремонтує побутову електротехніку, проаналізувавши причини поломок, дійшла висновку про такий процентний розподіл кількості поломок за їх типами (див. табл. 5.2).

*Таблиця 5.2*

Вихідні дані для задачі 5.26

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *Тип поломки, %* | | |
| Електрична | Механічна | Зовнішня |
| *Під час гарантійного строку* | 10 | 25 | 17 |
| *Після гарантійного строку* | 15 | 30 | 3 |

Нехай А та В– такі події:

А = {навмання вибраний прилад має електричний тип поломки};

Б = {навмання вибраний прилад зламався після гарантійного строку}.

Чи будуть події А та В незалежними?

##### 6. Формули множення ймовірностей для залежних і незалежних випадкових подій

Самостійна робота - год.

*Зміст*:

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

*Література*:

**Методичні вказівки.**

Ймовірність сумісної появи двох подій дорівнює добутку ймовірності одного з них на умовну ймовірність іншого, обчислену за умови, що перша подія вже відбулася:

Р(АВ)=Р(А)⋅РА(В)=Р(В)⋅РВ(А).

У випадку скінченної кількості залежних випадкових подій формула множення матиме такий вигляд:

Р(Ai)=Р(А1)⋅Р(А2)⋅Р(А3)⋅…⋅Р(Аn)

Якщо події А та В незалежні, то формула матиме такий вигляд:

Р(АВ)=Р(А)⋅Р(В).

У випадку скінченної кількості незалежних випадкових подій формула множення матиме такий вигляд:

Р(А1А2Аn)=Р(А1)⋅P(A2)⋅…⋅Р(An).

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 6.1* Ймовірність отримати повідомлення від певної особи на протязі доби дорівнює 0,35. Знайти ймовірність того, що повідомлення на протязі доби від цієї особи не буде отримано.

*Розв’язання* Позначимо за подію – повідомлення від цієї особи на протязі доби надійде. За умовою задачі має місце співвідношення . Протилежна подія  означає, що на протязі доби від цієї особи повідомлення не надійде. За формулою: одержимо:

.

*Приклад 6.2.* У ящику міститься 10 однотипних деталей. Із них 6 стандартні, а решта – браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято три деталі. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

а) А – три деталі виявляться стандартними;

б) Б – три деталі виявляться бракованими;

с) С – дві деталі будуть стандартні і одна бракована.

*Розв’язання.* Нехай Аі – поява стандартної деталі при і-тому вийманні, – поява бракованої деталі при і-тому вийманні. Подія А=, В=, С=(.

Оскільки випадкові події Аі,  залежні, то :

,

Р(В)=Р()=Р(=,

Р(С)=РР(= =Р

(



**Задачі**

* 1. У ящику міститься 15 однакових деталей. Із них 9 стандартні, решта – браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято три деталі. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

А – три деталі виявляться стандартними;

Б – три деталі виявляться бракованими;

С – дві деталі будуть стандартні і одна бракована.

* 1. Із множини чисел навмання беруть одне число, а далі з решти – друге. Яка ймовірність того, що здобуте двоцифрове число буде парним?
  2. Гральний кубик і монету підкидають по одному разу. Яка ймовірність того, що при цьому на грані кубика випаде число, кратне трьом, а на монеті – герб.
  3. Маємо три конусні та сім еліпсовидних валиків. Спочатку беремо один валик, потім інший. Яка ймовірність того, що перший валик був конусний, другий – еліпсовидний?
  4. В урні знаходиться 5 білих, 4 чорних і 3 синіх кулі. Кожне випробування полягає в тому,що навмання береться одна куля і назад не повертається. Знайти ймовірність того, що при першому випробуванні з’явиться біла куля, при другому – чорна, при третьому – синя.
  5. Знайти ймовірність одночасного попадання в ціль двома гарматами, якщо ймовірність попадання в ціль першою гарматою дорівнює 0,8, другою – 0,7.
  6. Маємо три ящики, в яких містяться по 10 деталей. В першому ящику – 8, в другому – 7, в третьому – 9 стандартних деталей. З кожного ящика навмання беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що всі три взяті деталі стандартні.
  7. У ящику лежать деталі трьох сортів: п’ять – першого, чотири – другого, три – третього. З ящика навмання виймають одну деталь і назад не повертають. Знайти ймовірність того, що при першому випробуванні з’явиться деталь першого сорту, при другому – другого, при третьому – третього.
  8. Події А1 А2 ,…,Аnнезалежні у сукупності. Знайти ймовірність того, що не відбудеться жодна з цих подій.
  9. Об’єднання складається з двох підприємств. Ймовірність появи бракованої продукції на першому підприємстві 0,1, на другому – 0,2. Знайти ймовірність того, що продукцію без браку випустить тільки одне підприємство.
  10. Для контролю за проростанням насіння вибрана випадковим чином партія із 100 насінин. Умовою непридатності всієї партії є наявність принаймні однієї насінини, що не проросте з 5, які перевіряються послідовно. Яка для даної партії ймовірність бути забракованою, якщо за статистичними даними не проростає 5% насінин?
  11. Три студенти складають екзамен з математики. Ймовірність того, що перший студент складе екзамен, дорівнює 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність відповідно дорівнює 0,8 і 0,7.Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

А – три студенти складуть екзамен;

В – три студенти не складуть екзамен;

С – два студенти складуть екзамен.

* 1. В урні міститься 9 червоних і 5 синіх кульок. Кульки з урни виймаються по одній без повернення. Таким чином вийняли чотири кульки. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

А – з’явиться чотири червоні кульки;

В – з’явиться чотири сині кульки;

С – з’явиться дві сині і дві червоні кульки.

* 1. Скільки потрібно кинути гральних кубиків, щоб з ймовірністю меншою за 0,3, можна було чекати, що на жодній із граней, які випали, не з’явиться шість очок?
  2. Ймовірність влучити в мішень для стрілка при одному пострілі дорівнює 0,8. Скільки пострілів повинен зробити стрілок, щоб із ймовірністю, меншою за 0,4, можна було сподіватися, що не буде жодного промаху?
  3. Відрізок розділений на три рівні частини. На цей відрізок кинули навмання три точки. Знайти ймовірність того, що на кожну із трьох частин відрізка попадає по одній точці. Ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розміщення.
  4. У читальному залі знаходиться 6 підручників з теорії ймовірностей, із яких 3 в твердій обкладинці. Бібліотекар навмання взяв два підручники. Знайти ймовірність того, що обидва підручники в твердій обкладинці.
  5. Для деякої місцевості середнє число хмарних днів у липні дорівнює шести. Знайти ймовірність того, що першого і другого липня буде ясно.
  6. У цеху працює 7 чоловіків і 3 жінки. За табельними номерами відібрали три особи. Знайти ймовірність того, що:

а) всі відібрані особи виявляться чоловічої статі;

б) всі відібрані особи виявляться жіночої статі;

в) серед відібраних осіб буде дві жінки та один чоловік.

* 1. В ящику знаходяться 10 деталей, серед яких 6 пофарбованих. Навмання беремо 4 деталі. Знайти ймовірність того, що всі взяті деталі виявляться пофарбовані.
  2. Студент знає 20 із 25 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на три запитання, які задав йому екзаменатор.
  3. Студент прийшов на залік, знаючи відповідь на 24 питання з 30. Яка ймовірність скласти залік, якщо після правильної відповіді на запитання викладач задає ще одне запитання?

###### 7.Формула повної ймовірності

Самостійна робота - год.

*Зміст*:

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

*Література*:

**Методичні вказівки.**

Ймовірність події А, яка може відбутися лише за умови появи однієї з несумісних подій В1, В2,…,Вn, які утворюють повну групу подій, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність:

Р(А)= .

Дана формула називається формулою **повної ймовірності**.

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 7.1.* Вивчають результати екзамену з математики у двох групах. У першій групі є 30 студентів, з них 11 отримали відмінну оцінку, а в другій відповідно – 25 і 9. Яка ймовірність того,що навмання вибраний студент отримав на екзамені відмінну оцінку?

*Розв’язання.* Випробування полягає в тому, що ми навмання обираємо студента із двох груп. Позначимо через А подію, що навмання вибраний студент на екзамені отримав відмінну оцінку. Це може статися, коли студента вибрано із першої групи (відбулася подія В1) або другої (В2). Отже, Р(В1)=, Р(В2)=. Використаємо формулу повної ймовірності:

Р(А)=.

За умовою задачі , .

Звідси .

**Задачі**

* 1. До складального цеху надходять деталі від трьох інших цехів. Від першого надходить 45% усіх деталей, від другого – 35% і від третього – 20%. Перший цех допускає в середньому 6% браку, другий – 2% і третій – 8%. Яка ймовірність того, що до складального цеху надійде стандартна деталь?
  2. У ящику міститься 11 однотипних деталей, із них 7 стандартних, а решта – браковані. Із ящика навмання беруть три деталі і назад не повертають. Яка ймовірність після цього вийняти навмання стандартну деталь?
  3. Маємо два набори деталей. Ймовірність того, що деталь першого набору стандартна, дорівнює 0,8, а другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь (із навмання взятого набору) – стандартна.
  4. У першій коробці знаходиться 20 радіоламп, серед них 18 стандартних; в другій коробці – 10 ламп, серед них 9 стандартних. Із другої коробки навмання взята лампа і перекладена в першу.Знайти ймовірність того, що лампа, навмання витягнута із першої коробки, стандартна.
  5. Вивчають результати екзамену з математики у двох групах. У першій групі є 28 студентів, з них 10 отримали відмінну оцінку, а в другій відповідно – 22 і 7. Яка ймовірність того,що навмання вибраний студент отримав на екзамені відмінну оцінку?
  6. У 10 ящиках складено деталі двох сортів. У перших трьох по три деталі першого сорту і по сім деталей другого; в четвертому – дев’ять деталей першого і одна деталь другого сорту; в шести ящиках, що залишились, по одній деталі першого і по дев’ять деталей другого сорту. З довільного ящика навмання виймають деталь. Визначити ймовірність того, що ця деталь другого сорту.
  7. В урні міститься дві кулі. Поклали туди ще одну білу кулю, після чого навмання виймаємо одну. Знайти ймовірність того, що витягнута куля буде білою, якщо рівноможливі всі припущення про склад куль (по кольору).
  8. В урні знаходиться n куль, кладемо туди ще одну білу кулю. Потім виймаємо навмання одну. Знайти ймовірність того, що витягнута куля буде білою, якщо рівноможливі всі припущення про склад куль (по кольору).
  9. В обчислювальній лабораторії знаходиться 6 автоматів та 4 напівавтомати. Ймовірність того, що за час проведення деякого підрахунку автомат не вийде з ладу, дорівнює 0,95; для напівавтомата ця ймовірність дорівнює 0,8. Студент проводить обрахунок на навмання обраній машині. Визначити ймовірність того, що до кінця обрахунку машина не вийде з ладу.
  10. Маємо п’ять гвинтівок, три з яких з оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілок влучить у мішень при пострілі із гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,7. Визначити ймовірність того, що по мішені буде влучено, якщо стрілок робить один постріл із навмання взятої гвинтівки.
  11. В ящику знаходиться 12 деталей, виготовлених заводом №1, 20 деталей – заводом №2 і 18 – заводом №3. Ймовірність того, що деталь, виготовлена заводом №1, відмінної якості, дорівнює 0,9; для деталей, виготовлених на заводах №2 і №3, ці ймовірності відповідно дорівнюють0,6 і 0,9. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться відмінної якості.
  12. В першій урні знаходиться 10 куль, 8 із яких білі; в другій урні 20 куль, із них 4 білі. Із кожної урни навмання беруть по одній кулі, а потім із цих двох куль навмання беруть одну. Знайти ймовірність того, що витягли білу кулю.
  13. У кожній із трьох урн знаходиться 6 чорних і 4 білих кулі. Із першої урни навмання витягли одну кулю і переклали її в другу урну, після цього із другої урни навмання витягли одну кулю і переклали в третю урну. Знайти ймовірність того, що куля, навмання взята із третьої урни, буде білою.
  14. Ймовірність того, що під час роботи цифрової електронної машини відбудеться збій в арифметичному пристрої, в оперативній пам’яті, в інших пристроях, співвідносяться як 3:2:5. Ймовірність того, що збій буде знайдено в арифметичному пристрої, в оперативній пам’яті, в інших пристроях відповідно дорівнює 0,8:0,9:0,9. Знайти ймовірність того, що збій в машині буде знайдено.
  15. Продукція виготовляється на двох підприємствах і надходить на спільну базу. Ймовірність виготовлення бракованої продукції для першого підприємства дорівнює 0,1, для другого – 0,2. Перше підприємство здало на склад 100 одиниць продукції, друге – 400. Знайти ймовірність того, що навмання взята зі складу одиниця продукції буде не бракованою.
  16. На склад підприємства надходять деталі із трьох цехів. Перший цех відправив 100 деталей, другий і третій – по 200. Перший і другий цехи дають по 2% браку, третій – 1%. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь бракована.
  17. Два верстати виготовляють деталі, які поступають на конвеєр. З першого верстата надійшло 400 деталей, а з другого на 50% більше. Перший верстат дає 2% браку, другий – 3%. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь з конвеєра бракована.
  18. У першому ящику є 20 деталей, з яких 30% пофарбовано, у другому 10 деталей і 4% пофарбовано. Знайти ймовірність того, що деталь, взята з навмання вибраного ящика, пофарбована.
  19. В урні 4 білі і 4 чорні кульки. Два гравці почергово виймають із урни по кульці, не повертаючи їх назад. Виграє той гравець, котрий раніше витягне білу кульку. Знайти ймовірність того, що: а) виграє перший гравець; б) виграє другий гравець.
  20. Маємо три урни. У першій міститься 6 білих і 4 чорних кульки, у другій – 8 білих і 2 чорних і в третій – 1 біла і 1 чорна. Із першої урни навмання беруть три кульки, а із другої – дві і перекладають у третю урну. Яка ймовірність після цього вийняти із третьої урни білу кульку?
  21. Серед N екзаменаційних білетів є *п* „щасливих”. Студенти підходять за білетами один за одним. У кого більша ймовірність узяти „щасливий” білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

##### 8.Формула Байєса

Самостійна робота - год.

*Зміст*:

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

*Література*:

**Методичні вказівки.**

Якщо випробування проведено і в результаті нього подія А з’явилася, то умовна ймовірність РA(Вk) може не дорівнювати Р(Вk). Порівняння цих ймовірностей дозволяє переоцінити ймовірність гіпотези за умови, що подія А з’явилася. Для цього використовують **формулу Байєса**:

, k=1,2,…,n.

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 8.1.* Два автомати виготовляють однакові деталі, які надходять на спільний конвеєр. Продуктивність першого автомата вдвічі більша за продуктивність другого. Перший автомат випускає в середньому 60% деталей без браку, а другий – 84%. Навмання взята з конвеєра деталь виявилась без браку. Знайти ймовірність того, що ця деталь виготовлена першим автоматом.

*Розв’язання.* Позначимо через А подію – деталь без браку. Можна сформулювати дві гіпотези: В1 – деталь виготовлена першим автоматом (оскільки перший автомат виготовляє вдвічі більше деталей, ніж другий): Р(В1)=; В2 – деталь виготовлена другим автоматом, причому Р(В2)=. Умовна ймовірність того, що деталь буде без браку, якщо вона зроблена першим автоматом, дорівнює . Умовна ймовірність того, що деталь буде без браку, якщо вона зроблена другим автоматом, дорівнює .Ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться без браку, за формулою повної ймовірності дорівнює:

Р(А)=.

Шукана ймовірність того, що взята деталь без браку виготовлена першим автоматом, за формулою Байєса дорівнює:

РА(В1)=.

**Задачі**

* 1. Маємо три групи ящиків. До першої групи належить 5 ящиків, у кожному з яких 7 стандартних і 3 браковані однотипні вироби, до другої групи – 9 ящиків, у кожному з яких 5 стандартних і 5 бракованих виробів, а до третьої – 3 ящики, у кожному з яких 3 стандартні й 7 бракованих виробів. Із довільно вибраного ящика три навмання взяті вироби виявилися стандартними. Яка ймовірність того, що вони були взяті з ящика, який належить третій групі?
  2. На склад надходять однотипні вироби з чотирьох заводів: 15% – із заводу № 1, 25% – із заводу № 2; 40% – із заводу № 3 і 20% – із заводу № 4. Під час контролю продукції, яка надходить на склад, установлено, що в середньому брак становить для заводу № 1 – 3%, заводу № 2 – 5%, заводу № 3 – 8% і заводу № 4 – 1%. Навмання взятий виріб зі складу виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його виготовив завод №1?
  3. Деталі, виготовлені цехом заводу, потрапляють для перевірки їх стандартності до одного з двох контролерів. Ймовірність того, що деталь попаде до першого контролера, дорівнює 0,6, а до другого – 0,4. Ймовірність того, що придатна деталь буде визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, а другим – 0,98. Придатна деталь при перевірці визнана стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь перевіряв перший контролер.
  4. В академічній групі 25 студентів, які складають екзамен з математики, із них 5 підготовлені відмінно, 10 – добре, 9 – задовільно і 6 – незадовільно. В екзаменаційних тестах міститься 10 питань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 10 запитань, добре підготовлений – на 7 запитань, задовільно підготовлений – на 5 запитань і незадовільно підготовлений – на 3 запитання. Навмання викликаний студент відповів на всі три запитання. Знайти ймовірність того, що це був студент: 1) відмінно підготовлений; 2) незадовільно підготовлений.
  5. Завод виготовляє вироби, кожний із яких з імовірністю *р* = 0,01 має дефект. Вироби можуть потрапити на перевірку першому або другому контролерові. Імовірність того, що перший контролер виявить дефект у виробі, дорівнює *р1 –*0,85, для другого контролера ця ймовірність *р2 –*0,95. Якщо виріб не був забракований контролерами, то він надходить до відділу технічного контролю заводу. Дефект, якщо він існує, може бути виявлений з імовірністю *р0*= 0,99. Яка ймовірність того, що після всієї процедури виріб було забраковано: 1) першим контролером; 2) відділом технічного контролю?
  6. Ймовірність знищити літак з одного пострілу для першої гармати дорівнює 0,2, а для другої – 0,1. Кожна гармата робить по одному пострілу, причому було одне влучення у літак. Яка ймовірність того, що влучила перша гармата?
  7. Телевізори виготовляють на трьох підприємствах. Брак на першому становить 10%, на другому – 5%, третьому – 15%. Випадковим чином купили телевізор, який виявився бракованим. Яка ймовірність того, що телевізор виготовлений:

а) першим підприємством;

б) другим підприємством;

в) третім підприємством? Порівняти ці ймовірності.

* 1. Система виявлення літака через наявність перешкод у зоні може давати помилкові покази з ймовірністю 0,05, а при наявності цілі в зоні система виявляє її з ймовірністю 0,9. Ймовірність появи противника в зоні дорівнює 0,25. Визначити ймовірність помилкової тривоги.
  2. Два автомати виготовляють однакові деталі, які поступають на конвеєр. Продуктивність першого автомата вдвічі більша за продуктивність другого. Перший автомат випускає в середньому 80% деталей без браку, а другий – 90%. Навмання взята з конвеєра деталь виявилась без браку. Знайти ймовірність того, що ця деталь виготовлена другим автоматом.

8.10. Підприємство отримало деталі від трьох постачальників: від 1-го – 200 штук, з яких 4 браковані, від 2-го – 400 штук, з яких 2 браковані і від третього – 400, з яких 1% – браковані. Деталі на складі розміщені в контейнерах. Визначити ймовірність того, що навмання взята деталь з навмання вибраного контейнера виявиться бракованою. Яка ймовірність, що це буде деталь від 3-го постачальника?

8.11. За зміну на склад підприємства надходять вироби із трьох цехів в однакових кількостях. Перший цех виробляє 1% браку, другий – 3% і третій – 2%. Навмання взятий зі складу виріб виявився бракованим. Яка ймовірність, що він виготовлений у другому цеху?

8.12. Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність зробити помилку в документі для першого економіста 0,1, для другого – 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий – 60. Навмання взятий з папки документ виявився з помилкою. Визначити ймовірність, що його склав перший економіст.

8.13. У першому ящику є 20 деталей, з яких 16 стандартних, у другому відповідно 10 і 7. Навмання взята деталь із випадковим чином вибраного ящика виявилася стандартною. Яка ймовірність, що деталь була взята з другого ящика?

8.14. Кількість вантажних автомобілів, що проїжджають по шосе, відносяться до кількості легкових автомобілів, що проїжджають по тому ж шосе, як 3:2. Ймовірність того, що заправлятиметься вантажний автомобіль, дорівнює 0,1; для легкового автомобіля ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки під’їхав автомобіль. Знайти ймовірність того, що він вантажний.

8.15. У лікарню поступають в середньому 50% хворих з хворобою К, 30% – з хворобою L, 20% – з хворобою М. Ймовірність повного одужання для хвороби К дорівнює 0,7, L – 0,8, М – 0,9. Хворий був виписаний з лікарні повністю здоровим. Знайти ймовірність того, що він хворів на хворобу К.

8.16. У піраміді 10 гвинтівок, із них чотири з оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілок влучить в мішень із гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,8. Стрілок влучив у мішень із навмання взятої гвинтівки. Що має більшу ймовірність: стрілок стріляв із гвинтівки з оптичним прицілом чи без нього?

8.17. Дві перфораторщиці набили на різних перфораторах по одному комплекту перфокарт. Ймовірність того, що перша перфораторщиця припуститься помилки, дорівнює 0,05; для другої перфораторщиці ця ймовірність дорівнює 0,1. При зварці перфокарт виявили помилку. Знайти ймовірність того, що помилки припустилася перша перфораторщиця.

8.18. Виріб перевіряється на стандартність одним із двох перевіряючих. Ймовірність того, що виріб попаде до першого перевіряючого, дорівнює 0,55, а до другого – 0,45. Ймовірність того, що стандартний виріб буде визнано стандартним першим перевіряючим, дорівнює 0,9, а другим – 0,98. Стандартний виріб при перевірці було визнано стандартним. Знайти ймовірність того, що цей виріб перевіряв другий перевіряючий.

8.19. Маємо три партії деталей по 20 деталей в кожній. Кількість стандартних деталей в першій, другій і третій партіях відповідно дорівнюють 20, 15, 10. Із навмання вибраної партії навмання вибрана деталь, яка виявилася стандартною. Деталь повертають в партію і другий раз навмання витягають деталь, яка теж виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що деталі були взяті із третьої партії.

8.20. Батарея із трьох гармат зробила залп, при цьому два снаряди попали в ціль. Знайти ймовірність того, що перша гармата влучила, якщо ймовірність попадання першою, другою і третьою гарматами відповідно дорівнює 0,4, 0,3, 0,5.

8.21. Два із трьох незалежно працюючих елементів обчислювального пристрою відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили перший і другий елементи, якщо ймовірність відмови першого, другого і третього елементів відповідно дорівнює 0,2, 0,4 і 0,3.

8.22. У першому ящику маємо 8 стандартних і 2 браковані деталі, а у другому – 5 стандартних і 5 бракованих. Ящики мають однаковий зовнішній вигляд. З навмання вибраного ящика взято (також навмання) дві деталі, які виявилися стандартними. Яка ймовірність того, що їх взяли з другого ящика?

8.23. Маємо два однакових ящики. У першому з них 8 пар взуття 41-го розміру та 6 пар 42-го розміру, а в другому– 10 пар 41-го розміру та 4 пари 42-го розміру. 3 вибраного навмання ящика витягли одну пару взуття 42-го розміру. Знайти ймовірність того, що ця пара взята з першого ящика.

8.24.У рибалки є три улюблених місця, куди він приходить з однаковою імовірністю. Ймовірність кльову на першому місці дорівнює 1/3, на другому – 1/2, на третьому – 1/4. Рибалка закинув вудку у навмання вибраному місці, і риба клюнула. Знайти ймовірність того, що рибалка закинув вудку у першому місці.

8.25. Ймовірність того, що кольоровий телевізор не зіпсується протягом гарантійного терміну дорівнює 0,7, для телевізора з чорно-білим зображенням ця ймовірність на 0,2 більша. Взятий навмання телевізор зіпсувався протягом гарантійного терміну. Знайти імовірність того, що це був кольоровий телевізор; чорно-білий. Порівняти ці ймовірності.

##### 9. Формула Бернуллі

Самостійна робота - год.

*Зміст*:

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

*Література*:

**Методичні вказівки.**

Якщо кожний експеримент має лише два несумісні наслідки (події) зі сталими ймовірностями ртаq, то їх називають експериментами за схемою **Бернуллі**. У кожному експерименті випадкова подія з ймовірністю рвідбувається, а з ймовірністю q– не відбувається, тобто p+q=1.

Простір елементарних подій для одного експерименту містить дві елементарні події, а для *п* експериментів за схемою Бернуллі –*2п*елементарних подій.

Ймовірність того, що в результаті *п* незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія А з’явиться *k*раз, знаходиться за формулою Бернуллі:

****.

*Зауваження1.* Ймовірність того, що в результаті n незалежних випробувань подія А з’явиться від kiдоkjраз, обчислюється так:

****.

*Зауваження2.* У багатьох випадках треба знаходити **найбільш ймовірне значення**k0 числа k появ події А. Це значення k визначається співвідношеннями:

або .

Число k0 повинно бути цілим. Якщо (п + 1)р – ціле число, тоді найбільше значення ймовірність має при двох числах:

k1=(n+1)p-1 та k2=(n+1)p.

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 9.1.* Митний пост дає статистичну оцінку того, що 20% усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларує весь товар, на який накладається податок. Якщо випадково відібрати 5 осіб, то яка ймовірність того, що 3 з них не задекларували весь товар?

*Розв’язання.* Позначимо через *А* подію, що навмання вибрана особа не задекларувала весь товар, *Р(А)=* 0,2. Задача задовольняє умовам формули Бернуллі: *п* = 5, *к = 3,р* = 0,2:

****.

*Приклад 9.2.* Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з них 0.8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти імовірність того, що:

а) відмовлять два блоки;

б) відмовить хоча б один блок;

в) відмовлять не менше двох блоків.

*Розв’язання.* Позначимо за подію *А* відмову блока. Тоді ймовірність події *А* за умовою прикладу буде*Р(А)* = р = 1 – 0,8 = 0,2, тому q = 1 – р = 1 – 0,2 = 0,8.Згідно з умовою задачі n = 10. Використовуючи формулу Бернуллі та Зауваження 1, одержимо:

а) Р10(2) =(0.2)2(0.8)8 = 0.202,

б) Р10(1 < m 10) = 1 – Р10(0) = 1 - (0.2)0(0.8)10 = 0.8926,

в) Р10(2  10) = 1 – (Р10(0) + Р10(1)) =1 – ((0,2) ⋅ (0,8))10 + +) = 0,6244.

*Приклад 9.3.* У разі додержання певної технології 90% усієї продукції, виготовленої заводом, є найвищого сорту. Знайти найімовірніше число виробів найвищого сорту в партії з 200 штук.

*Розв’язання.* За умовою задачі *п*=200;*р*=0,9; q=1*–р*=0,1.

Використовуючи зауваження2, дістаємо:







Отже, найімовірніше число виробів першого сорту серед 200 дорівнює 180.

**Задачі**

9.1. Ймовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні її в електромережу, є величиною сталою і дорівнює 0,9.Обчислити ймовірність того, що з п’яти електролампочок, увімкнених у електромережу, не перегорять: 1) дві; 2) не більш як дві; 3) не менш як дві.

9.2. При новому технологічному процесі 80% усієї виготовленої продукції має найвищу якість. Знайти найбільш ймовірне число виготовлених виробів найвищої якості серед 250 виготовлених виробів.

9.3. Ймовірність того, що студент складе іспит з математики, є величиною сталою і дорівнює в середньому 0,8. Нехай є група з восьми студентів. Знайти найімовірнішу кількість членів цієї групи,котрі складуть іспит з математики, і обчислити відповідну ймовірність.

9.4. Ймовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні її в електромережу, є величиною сталою і дорівнює 0,9.Обчислити ймовірність того, що з п’яти електролампочок, увімкнених у електромережу, не перегорять: 1) дві; 2) не більш як дві; 3) не менш як дві.

9.5. Бізнесмен, вивчивши попит ринку на нові спортивні автомобілі, вирішив продати пробну партію з дев’яти таких автомашин. Ймовірність отримати високий прибуток за рахунок кожної машини оцінена в 0,8 і вважається успіхом, якщо за день їх буде продано не менше семи. Яка ймовірність успіху, якщо протягом дня продаж машин відбувається незалежно?

9.6. Встановлено, що 90% висіяних у грунт зерен насіння огірків проростає. Визначити найімовірніше число зернин, що проростуть, якщо в пакеті 70 зернин.

9.7. При новому технологічному процесі 80% усієї виготовленої продукції має найвищу якість. Знайти найбільш ймовірне число виготовлених виробів найвищої якості серед 250 виготовлених виробів.

9.8. Ймовірність того, що студент складе іспит з математики, є величиною сталою і дорівнює в середньому 0,8. Нехай є група з восьми студентів. Знайти найімовірнішу кількість членів цієї групи,котрі складуть іспит з математики, і обчислити відповідну ймовірність.

9.9. Робітник обслуговує шість верстатів-автоматів. Ймовірність того, що протягом години верстат-автомат потребує уваги робітника, є величиною сталою і дорівнює 0,6. Яка ймовірність того, що за годину уваги робітника потребують: 1) три верстати; 2) від двох до п’яти верстатів; 3) принаймні один?

9.10. Під час тестування з математики студент має дати правильні відповіді на 5 запитань. Ймовірність того, що він на позитивну оцінку відповість на одне запитання, у середньому дорівнює 0,8. Щоб скласти тест, студентові необхідно дати відповідь не менш ніж на три питання. Знайти ймовірність того, що студент складе тест.

9.11. Садівником восени було посаджено сім саджанців яблуні. Ймовірність того, що будь-який із саджанців навесні проросте, у середньому складає 0,7. Обчислити ймовірність того, що із семи саджанців яблуні навесні проростуть: 1) три саджанці; 2) не менш як три. Знайти найімовірніше число саджанців, які навесні проростуть, і обчислити відповідну ймовірність.

9.12. Ймовірність виготовлення робітником деталі відмінної якості становить 0,75. Яка ймовірність того, що серед 6 виготовлених деталей робітником хоча б одна буде відмінної якості? Знайти найімовірніше число виготовлених робітником деталей відмінної якості й обчислити ймовірність цього числа.

9.13. Є 12 стандартних та 4 нестандартних деталі. Навмання беруть 3 з них (з поверненням). Знайти ймовірність того, що серед взятих деталей: а) усі три стандартні; б) не більше однієї стандартної; в) хоча б одна нестандартна.

9.14. У виробництві деякої продукції третій сорт складає 20%. Знайти ймовірність того, що з 5 навмання взятих виробів цієї продукції не менше ніж три будуть третього сорту.

9.15. На складі є вироби двох сортів, причому виробів другого сорту в 1,5 рази більше, ніж виробів першого сорту. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання взятих виробів хоча б один першого сорту.

9.16. Ймовірність виготовлення стандартного виробу дорівнює 0,95. Яка ймовірність того, що серед 10 виробів не більше одного нестандартного?

9.17. Фірма, що проводить поштове опитування, встановила, що 40% одержувачів анкет повертає їх назад. Яка ймовірність того, що рівно 8 сімей повернуть анкети, якщо опитують 20 сімей? 15 сімей?

9.18. Студент складає екзамен, де має дати ствердну або заперечну відповідь. Екзамен складається з 10 запитань. Припустимо, що ймовірність правильної відповіді на кожне запитання дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що студент пройде тест (для одержання тесту треба мати 7 чи більше правильних відповідей). Якщо тест складається з 20 запитань і потрібно дати 14 чи більше правильних відповідей, то чи зміниться ймовірність складання екзамену?

9.19. Було доведено, що вакцина проти грипу (для створення імунітету) ефективна на 95%. Якщо навмання вибрати 4 людей, яким було зроблено щеплення, то яка ймовірність того, що жоден з них не захворіє?

9.20.У кошику є 5 червоних м’ячів і 5 синіх. М’ячі вибирають навмання і повертають назад у кошик. Якщо навмання вибрати 2 м’ячі, то яка ймовірність того, що вони будуть червоні? сині?

9.21. Встановлено, що під час процесу виробництва ймовірність того, що партія товару буде мати дефекти, дорівнює 0,1. Якщо є 10 партій, то яка ймовірність, що дефектів буде менше, ніж 2?

9.22. У місцевому пологовому будинку 45% усіх новонароджених чоловічої статі. Одного дня народилося 5 малюків. Яка ймовірність того, що троє чи більше з них – хлопчики? Яке найімовірніше число хлопчиків народиться?

9.23. Було встановлено, що 25% сімей міста мають кабельне телебачення. Яка ймовірність, що з 10 сімей 5 мають кабельне телебачення? Не більше ніж 5?

9.24. Садівник восени посадив сім саджанців яблуні. Ймовірність того, що будь-який із саджанців навесні проросте, у середньому дорівнює 0,7. Обчислити ймовірність того, що із семи саджанців яблуні навесні проросте:а) три саджанці;б) не менш як три.Знайти найімовірніше число саджанців, які навесні проростуть і обчислити відповідну ймовірність.

9.25. Яка ймовірність того, що при 5 підкиданнях монети від 2 до 4 разів випаде герб?

##### 10. Локальна та інтегральна теореми Лапласа

Самостійна робота - год.

*Зміст*:

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

*Література*:

**Методичні вказівки.**

***Локальна теорема Лапласа****.* Якщо ймовірність *р* появи події А в кожному випробуванні постійна і відмінна від 0 та 1, то ймовірність *pn(k)* того, щоподія А з’явиться в n випробуваннях рівно *k* разів наближено дорівнює (чим n більше, тим ймовірність точніша) значенню функції

при .

Значення функції  при невід’ємних значеннях аргументу *x* в межах від 0 до 4 подано в таблицях (див. додаток В).

Дану теорему доцільно використовувати при та .

***Інтегральна теорема Лапласа****.* Якщо ймовірність *р* появи події А в кожному випробуванні постійна і відмінна від 0 та 1, то ймовірність *pn(k1,k2)* того, щоподія А з’явиться в n випробуваннях від *k1* до *k2*разів наближено дорівнює визначеному інтегралу:

, де , .

Функція  теж протабульована (див. додаток А).

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 10.1.* Знайти ймовірність того, що подія А наступить 10 разів у 100 незалежних випробуваннях, якщо подія А з’являється в кожному випробуванні з ймовірністю 0,2.

*Розв’язання.* Використаємо локальну теорему Лапласа:

.

За таблицею знаходимо:. Звідси:



*Приклад 10.2.* В електромережу ввімкнено незалежно одну від одної 500 електролампочок. Ймовірність того, що електролампочка не перегорить в електромережі, є величиною сталою і дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з 500 електролампочок не перегорить не менш як 390 штук?

*Розв’язання.* За умовою задачі n=500, p=0,8, q=0,2, .

, .

;

.

Отже 

## **Задачі**

10.1. Фабрика випускає 75% виробів 1-го сорту. Із партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) виробів 1-го сорту виявиться 290 шт.;

2) 300 шт.;

3) 320 шт.

10.2. Імовірність того, що посіяне зерно ячменю проросте в лабораторних умовах, у середньому дорівнює 0,9. Було посіяно 700 зернин ячменю в лабораторних умовах. Визначити найімовірніше число зернин, що проростуть із цієї кількості зернин, та обчислити ймовірність цього числа.

10.3. Знайти ймовірність того, що подія А настане рівно 80 раз в 400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

10.4. Ймовірність влучити в мішень за один постріл дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що за 10 пострілів стрілок влучить в мішень 8 раз.

10.5. Гральний кубик підкидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з’явиться 267 разів?

10.6. Знайти ймовірність того, що подія А настане 20 разів у 200 незалежних випробуваннях, якщо подія А з’являється в кожному випробуванні з ймовірністю 0,3.

10.7. Верстат-автомат виготовляє однотипні деталі. Імовірність того, що виготовлена одна деталь виявиться стандартною, є величиною сталою і дорівнює 0,95. За зміну верстатом було виготовлено 800 деталей. Яка ймовірність того, що стандартних деталей серед них буде: 1) від 720 до 780 шт.; 2) від 740 до 790 шт.?

10.8. За допомогою статистичних даних підраховано, що ймовірність захворіти грипом під час епідемії для кожної людини дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що з 400 перевірених осіб хворими виявляться:

а) рівно 80 осіб;

б) від 70 до 100 осіб?

10.9. Гральний кубик підкидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з’явиться не менше 260 та не більше 274 разів?

10.10. В електромережу ввімкнено незалежно одну від одної 500 електролампочок, які освітлюють у вечірній час виробничий цех заводу. Ймовірність того, що електролампочка в електромережі не перегорить, є величиною сталою і дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з 500 електролампочок не перегорить:

1) не більш як 380 шт.;

2) не менш як 390 шт.?

10.11. Ймовірність того, що деталь не пройшла перевірку ВТК, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей неперевірених буде від 70 до 100 деталей.

10.12. Ймовірність присутності студента на лекції дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 100 студентів на лекції будуть: а) не менш як 75 та не більше як 90; б) не менше 75; в) не більше 74.

10.13. Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу при транспортуванні дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні буде пошкоджено: а) три вироби; б) менше трьох виробів; в) більше трьох виробів.

10.14. Засівний фонд має 92% насіння першого сорту. Навмання взято 150 насінин. Знайти ймовірність того, що серед цих насінин 140 першого сорту.

10.15. Виробництво дає 10% браку. Знайти ймовірність того, що із 200 навмання вибраних виробів 15 будуть бракованими.

10.16. Ткаля обслуговує 1000 веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини обрив станеться на 7 веретенах.

10.17. Знайти наближено ймовірність того, що при 400 випробуваннях подія настане рівно 104 рази, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

10.18. Ймовірність того, що покупець, який завітав до взуттєвого магазину, здійснить покупку, дорівнює в середньому 0,1. Знайти ймовірність того, що із 900 покупців, що завітали до магазину, здійснять покупку: 1) 90 покупців; 2) від 100 до 180 покупців.

10.19. У партії однотипних деталей стандартні становлять 82%. Навмання із партії беруть 400 деталей. Знайти ймовірність того, що серед них стандартних буде: 1)355; 2) від 355 до 300.

10.20. Ймовірність виходу із ладу виробу під час його випробування на надійність дорівнює 0,05. Знайти ймовірність того, що під час випробування 900 виробів із ладу вийдуть: 1)30; 2) не більш як 30.

10.21. Процент проростання пшеничного насіння становить 95%. Знайти ймовірність того, що з 2000 посіяних насінин проросте від 1880 до 1920.

10.22. Електростанція обслуговує мережу з 10000 ламп; ймовірність включення кожної з них 0,6. Визначити ймовірність одночасного включення від 5900 до 6100 ламп.

10.23. Ймовірність появи додатного результату в кожному із *п* випробувань дорівнює 0.9. Скільки треба здійснити випробувань, щоб з імовірністю 0,98 можна було чекати, що не менше 150 випробувань будуть мати додатний результат?

10.24. Досліджують 500 проб руди. Імовірність промислового вмісту заліза у кожній пробі дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що кількість проб з промисловим вмістомзаліза буде між 300 та 370.

10.25. Знайти ймовірність того, що подія А настане 1400 разів у 2400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,6.

10.26. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що сере 100 новонароджених виявиться 50 хлопчиків.

10.27. Ймовірність появи події в кожному із незалежних випробувань дорівнює 0,8. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,9 можна стверджувати, що подія з’явиться не менше 75 разів?

##### 11. Числові характеристики дискретних випадкових величин

Самостійна робота - год.

*Зміст*:

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

*Література*:

**Методичні вказівки.**

Характеристикою середнього значення випадкової величини слугує **математичне сподівання**. У практичній діяльності під математичним сподіванням розуміють **центр розподілу** випадкової величини.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називають число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень X на відповідні їм імовірності:

.

Якщо випадкова величинаприймає нескінчену кількість значень, то

,

причому, вважається, що ряд, який знаходиться в правій частині рівності, збігається абсолютно та сума всіх ймовірностей дорівнює одиниці.

Математичне сподівання має такі властивості:

1. Математичне сподівання від сталої величини С дорівнює самій сталій:

М(С)=С.

1. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань:

.

1. Математичне сподівання добутку взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань:

.

1. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання:

*М(С⋅Х)=С⋅М(Х).*

Характеристиками **розсіювання** можливих значень випадкової величини навколо математичного сподівання є **дисперсія** та**середнє квадратичне відхилення.**

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення:

.

Дисперсію зручно обраховувати за формулою:

.

Дисперсія має такі властивості:

1. Дисперсія сталої величини С дорівнює нулю:

М(С)=0.

1. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій:

.

1. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату:

*D(С⋅Х)=C2⋅D(Х).*

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називають квадратний корінь із дисперсії:

.

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 11.1.* Закон розподілу дискретної випадкової величини задано у табл. 11.1.

*Таблиця 11.1*

Вихідні дані до прикладу 11.1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***xi*** | -6 | -4 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| ***Рі*** | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

Обчислити *М(Х), D(X), .*

*Розв'язання.* .



.

.

**Задачі**

11.1.Закон розподілу дискретної випадкової величини задано у табл. 11.2.

*Таблиця 11.2*

Вихідні дані до задачі 11.1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***xi*** | –6 | –4 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| ***Рі*** | 0,05 | 0,05 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,2 |

Обчислити *М(Х).*

11.2. Закони розподілу випадкових величин *X*і *У* задані у табл. 11.3 та 11.4.

*Таблиця 11.3*

Вихідні дані до задачі 11.2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***xi*** | –0,5 | –0,1 | 0,1 | 0,5 |
| ***Рі*** | 0,4 | 0,1 | 0,1 | 0,4 |

*Таблиця 11.4*

Вихідні дані до задачі 11.2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Уі*** | –100 | –80 | –10 | 10 | 10 | 80 |
| ***Рі*** | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,2 |

Обчислити *М(Х)* і *М{У)* та порівняти їх.

11.3.Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею 11.5.

*Таблиця 11.5*

Вихідні дані до задачі 11.3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Хі*** | -4 | -2 | 1 | 2 | 4 | 6 |
| ***Рі*** | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |

Обчислити , *.*

11.4. Маємо чотири електролампочки, кожна з яких має дефект з імовірністю *(р* = *1 - q =* 0,9 – імовірність того, що в лампочці дефект відсутній). Послідовно беруть по одній лампочці, вгвинчують у патрон і вмикають електричний струм. Під час вмикання струму лампочка з дефектом перегорить, і її замінять на іншу. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини *X*– число лампочок, які будуть випробувані. Обчислити ****.

11.5. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X задано функцією:



Обчислити , *.*

11.6. Четверо студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Імовірність того, що перший із них складе іспит, дорівнює 0,9; для другого і третього ця ймовірність дорівнює 0,8, а для четвертого – 0,7. Побудувати закон розподілу величини *X*– числа студентів, котрі складуть зазначений іспит, і обчислити *М(Х), D(X), .*

11.7. Маємо три ящики. У першому з них міститься 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі, у другому – 8 стандартних і 2 браковані й у третьому – 5 стандартних і 5 бракованих деталей. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі.Обчислити *М(Х), D(X), *для дискретної випадкової величини *X* – появи числа стандартних деталей серед трьох навмання взятих.

11.8. П’ять приладів перевіряють на надійність. Кожний наступний прилад підлягає перевірці лише в тому разі, якщо перед цим перевірений прилад виявиться надійним. Імовірність того, що прилад витримає перевірку на надійність, дорівнює 0,8 для кожного із них.Обчислити *М(Х), D(X), *дискретної випадкової величини *X –*кількість приладів, що пройшли перевірку.

11.9. При підкиданні трьох гральних кубиків гравець може виграти 18 грн., якщо на трьох кубиках випаде цифра 6; 1 грн. 40 коп., якщо на двох гральних кубиках випаде цифра 6, і 20 коп., якщо лише на одному кубику з трьох випаде цифра 6. Який у середньому буде виграш гравця? Яка має бути ставка за участь у грі, щоб вона була принаймні безкоштовною?

11.10. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості очок, що з’являться в результаті одного підкидання грального кубика.

11.11. Монета підкидається до першої появи герба. Знайти середню кількість підкидань.

* 1. Садівник восени посадив три саджанці: одну яблуню, одну грушу й одну вишню. Імовірність того, що саджанець яблуні весною прийметься, дорівнює 0,7. Для саджанців груші та вишні ця ймовірність становить відповідно 0,9 і 0,8. Обчислити математичне сподівання та дисперсію числа саджанців, які приймуться весною.
  2. Статистична обробка інформації службою автодорожніх пригод дала такі наслідки: в інтервалі часу від 16 год 30 хв до 18 г 30 хв у робочі дні може відбутися нуль, одна, дві або 3 автомобільні катастрофи з імовірністю відповідно 0,92; 0,04; 0,03; 0,01.Обчислити математичне сподівання числа катастроф у зазначений проміжок часу.
  3. Фермер очікує, що в наступному році кури на його фермі нанесуть 10000 яєць. Беручи до уваги різні витрати й коливання цін, фермер розраховує виручити не більш як 160 коп. за десяток яєць і витратити на них не більш як 80 коп. Імовірність можливих виграшів і витрати такі (див. табл. 11.6).

*Таблиця 11.6*

Вихідні дані до задачі 11.14

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Ціна за 10 яєць, коп.* | 160 | 140 | 120 | 0 | 80 |
| *pi* | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,04 | 0,06 |

Визначити очікуваний прибуток від продажу одного десятка яєць і всіх 10000.

* 1. Серед п’яти однотипних телевізорів є лише один в робочому стані. Щоб на нього натрапити, навмання беруть один із них і після відповідної перевірки відставляють його окремо від решти. Перевірка триває до появи телевізора в робочому стані. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини *X –* кількості перевірених телевізорів.
  2. По мішені проведено 3 постріли. Імовірність влучення у мішень першого пострілу становить 0,1, другого – 0,2, а третього – 0,3. Знайти ряд розподілу кількості влучень при трьох пострілах. Обчислити математичне сподівання та дисперсію.

11.17. Члени товариства охорони тварин міста N провели огляд ваги популяції одного виду звірів. В експерименті взяло участь 20 членів товариства. Зафіксовані ними дані подані нижче в порядку зростання: 4, 4, 5, 6, 7, 7, 9, 9, 9, 10, 12, 13, 15, 15, 17, 20, 25, 25, 26, 26. Побудуйте статистичний розподіл та визначте числові характеристики розподілу ваги звірів.

11.18. У місті встановили спеціальну телефонну лінію для тих, хто хоче вирішити свої наркологічні проблеми і шукає допомоги. Дані, що стосуються кількості дзвінків, які надходять щодня, подано у табл. 11.7.

*Таблиця 11.7*

Вихідні дані до задачі 11.18

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Кількість дзвінків щодня, (х)* | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| *Р(х)* | 0,08 | 0,14 | 0,18 | 0,24 | 0,16 | 0,1 | 0,08 | 0,02 |

Яка середня кількість та середньоквадратичне відхилення дзвінків за день?

11.19. У таблиці подані підсумки статистичних даних, в якій відділ менеджменту навколишнього довкілля дає інформацію про кількість лісових пожеж, що сталися на протягом 60 днів (див. табл. 11.8).

*Таблиця 11.8*

Вихідні дані до задачі 11.19

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Пожежі у лісі за день* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| *Частота* | 5 | 4 | 8 | 12 | 10 | 7 | 6 | 5 | 3 |

Визначте середнє значення, медіану, моду та коефіцієнт варіації для цих даних та поясніть їх.

11.20. Виробник автомобілів повідомив про повернення автомобілів за 1982-84 рр. через брак у кулачкових валах. Відповідальна фірма за технічне обслуговування в регіоні щодня записували дані про число рекламацій, що надійшли на кулачкові вали. За цими даними побудована табл. 11.9 розподілу ймовірностей для кожного дня.

*Таблиця 11.9*

Вихідні дані до задачі 11.20

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Повідомлення за день, (х)* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| *Ймовірність, Р(х)* | 0,1 | 0,15 | 0,18 | 0,22 | 0,16 | 0,08 | 0,06 | 0,03 | 0,02 |

а) Підрахуйте середнє значення цього розподілу;

б) Підрахуйте середнє квадратичне відхилення і дисперсію.

11.21. Товариство, що веде спостереження за НЛО, зібрало дані про частоту повідомлень в Європі. Табл. 11.10– це розподіл ймовірностей про число спостережень:

*Таблиця 11.10*

Вихідні дані до задачі 11.21

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Число повідомлень за день (х)* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *Ймовірність Р(х)* | 0,32 | 0,24 | 0,2 | 0,15 | 0,05 | 0,04 |

а) Підрахуйте середнє значення цього розподілу;

б) Підрахуйте середнє квадратичне відхилення і дисперсію.

11.22. У пологовому будинку 52% усіх новонароджених чоловічої статі. Одного дня народилось 5 малюків. Запишіть відповідний закон розподілу. Яка ймовірність того, що троє чи більше з них – хлопчики? Яке середнє значення для цього розподілу *(п=5)?* Яке середньоквадратичне відхилення?

11.23.Ймовірність вироблення дефектних партій під час процесу виробництва складає 15%. Яке буде їх середнє значення для 500 партій? Яке середньоквадратичне відхилення для цього розподілу?

11.24. Ймовірність відмови деталі за час випробування її надійності дорівнює 0,2. Знайти математичне сподівання числа деталей, що відмовили, коли випробуванню підлягало 10 деталей.

11.25. Знайти математичне сподівання числа лотерейних білетів, на які випадає виграш, якщо куплено 20 білетів, причому ймовірність виграшу по одному білету дорівнює 0,3.

11.26. Відбувається 10 незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює 0,6. Знайти дисперсію випадкової величини X-числа появ події в цих випробуваннях.

##### 12. Функція розподілу, щільність. Числові характеристики неперервних випадкових величин

Самостійна робота - год.

*Зміст*:

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

*Література*:

**Методичні вказівки.**

**Функцією розподілу** F(x) (**інтегральною**) називають ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше x:



**Диференціальною** функцією розподілу або **щільністю ймовірностей** неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від її інтегральної функції розподілу і позначають :



*Теорема 1.* Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення з інтервалу (а; b), можна знайти за формулою:



*Теорема 2.*Якщо неперервна випадкова величина приймає значення на відрізку [a,b] та має щільність ймовірності f(x), то її математичне сподівання знаходиться за формулою:

.

Дисперсію обчислюють за формулою:



Наслідок. Якщо диференціальна функція розподілу відома f(x), то інтегральну функцію розподілу F(x) можна знайти за формулою:

.

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 12.1.* Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка задана функцією розподілу:



*Розв'язання.* Спочатку знайдемо диференціальну функцію розподілу, тобто щільність ймовірності**:**

****

Тепер за теоремою2 знаходимо математичне сподівання:

****

Далі знаходимо дисперсію:

****

Середнє квадратичне відхилення:

****

*Приклад 12.2*. Щільність ймовірності випадкової величини X має такий вигляд:

****

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення, яке належить інтервалу (0,5; 1).

*Розв'язання.* Шукана ймовірність за теоремою1 дорівнює:

****

**Задачі**

12.1. Випадкова величина Xзадана функцією розподілу:



Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення, яке належить інтервалу (0, 2).

12.2**.** Випадкова величина X задана функцією розподілу:



Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення, яке належить інтервалу (0; 1).

12.3.Випадкова величина X задана функцією розподілу:



Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення, яке належить інтервалу (2; 3).

12.4**.** Задана щільність ймовірності випадкової величиниX:



Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення, яке належить інтервалу (0,5; 1).

12.5. Знайти функцію розподілу за даною щільністю розподілу:



12.6. Закон розподілу неперервної випадкової величини X такий:



Знайти *f(x*) і обчислити *P(0<X<2).*

12.7. Щільність неперервної випадкової величиниX подано у вигляді:

********

Знайти F(x) та обчислити .

12.8. Дано функцію розподілу ймовірностей:

********

Знайти f(x) та обчислити .

12.9.Дано функцію розподілу ймовірностей:

********.

Знайти f(x).

12.10. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка задана функцією розподілу:

********

12.11. Щільність ймовірності неперервної випадкової величиниX подано у вигляді:

********

Знайти ймовірність того, що X прийме значення із проміжку .

12.12. Задана диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини X:

********

Знайти інтегральну функцію розподілу.

12.13. Задана диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини X:

********

Знайти числові характеристики випадкової величини X.

12.14. Випадкова величина доходу X підприємства має диференціальну функцію розподілу:

********

Знайти M(X), D(X) та ймовірність одержання прибутку(1; 5].

12.15. Диференціальна функція розподілу прибутку X підприємства відома:

** (0; 5); (0; 5).

Знайти математичне сподівання прибутку, дисперсію та ймовірність одержання прибутку млн. грн.

12.16. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, яка задана функцією розподілу:

********

12.17Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом розподілу:

********.

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення, яке належить інтервалу (1; 3).

12.18. Обчислити дисперсію випадкової величини, що розподілена рівномірно:

**(a; b) **(a; b).

* 1. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X, що має таку густину розподілу:

**

* 1. Густина розподілу ймовірності випадкової величини X має такий вигляд:

********

Знайти математичне сподівання та дисперсію.

* 1. Щільність розподілу випадкової величини X дорівнює:

********.

Знайти функцію розподілу та математичне сподівання.

* 1. Щільність розподілу випадкової величини X дорівнює:

********

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини.

##### 13. Вибірковий метод

Самостійна робота - год.

*Зміст*:

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

*Література*:

**Методичні вказівки.**

Додатне число, що вказує, скільки раз та чи інша варіанта зустрічається в таблиці даних, називається **частотою**.

Статистичний розподіл вибірки встановлює зв’язок між рядом варіант і відповідними частотами.

Відношення частоти  варіанти до об’єму вибірки*n*називається **відносною частотою**:



Якщо поділити всі частоти на ширину інтервалу h, то отримаємо розподіл щільності частоти вибірки:



**Емпіричною функцією розподілу** називають функцію , яка визначає для кожного значенняxчастість події X<x:



де *nx*– кількість варіант, які менші від x;

n – об’єм вибірки.

**Полігоном частот** (відносних частот) називають ламану, відрізки якої сполучають точки (), (),…,() ), (),…,.

Полігон частот та полігон відносних частот є аналогом щільності ймовірності.

**Гістограмою частот** (відносних частот) називають ступінчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали варіант довжиною , а висоти дорівнюють відношенню – щільність частоти – щільність відносної частоти.

Площа гістограми частот дорівнює об’єму вибірки, а площа гістограми відносних частот – одиниці.

**Медіана** – це варіанта, яка має найбільшу частоту. Вона обчислюється за такою формулою:

.

**Мода** – це варіанта, яка ділить варіаційний ряд навпіл. Вона обчислюється за такою формулою:



де – початок модального інтервалу;

– крок інтервалу,

– частота домодального інтервалу;

– частота модального інтервалу;

– частота після модального інтервалу.

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 13.1.* За заданим дискретним статистичним розподілом вибірки (див. табл. 13.1).

*Таблиця 11.3*

Вихідні дані до прикладу 13.1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X=xi* | -6 | -4 | -2 | 2 | 4 | 6 |
|  | 5 | 10 | 15 | 20 | 40 | 10 |
|  | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,4 | 0,1 |

потрібно побудувати *F\*(х)* і зобразити її графічно.

*Розв'язання.* Об’єм цієї вибірки буде:

.Найменша варіанта дорівнює –6, тому*F\*(х)=0*  для . Найбільша варіанта дорівнює 6, тому *F\*(х) =1* для . Значення x<-4 спостерігалося 5 разів, тому *F\*(х)=* при . Значення x<-2 спостерігалося 15 разів, тому *F\*(х)=* при .

Значення x<2 спостерігалося 30 разів, тому *F\*(х)=* при . Значення x<4 спостерігалося 50 разів, тому *F\*(х)=* при . Значення x<6 спостерігалося 90 разів, тому *F\*(х)=* при .

Графічне зображення *F\*(х)*подано на рис. 13.1.

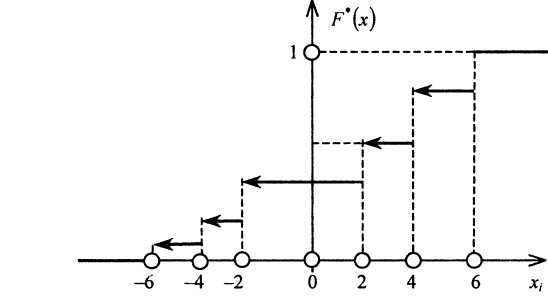


Рис. 13.1 Емпірична функція розподілу

*Приклад 13.2.* У результаті вибірки одержали такі значення ознаки *X*: -3, 2, -1, -3, 5, -3, 2. Побудувати полігон частот цієї вибірки.

*Розв’язання.* У цьому випадку варіантами будуть:



Відповідні їм частоти:



Відклавши у системі координат *(хОп)*точки: та з’єднавши їх відрізками прямих, одержимо полігон частот цієї вибірки ( Рис. 13.2.).

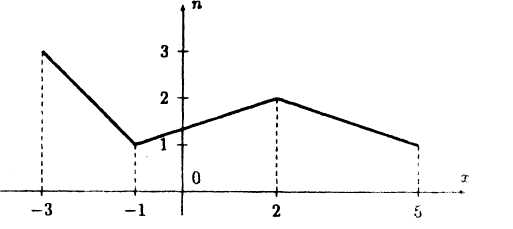


Рис. 13.2 Полігон частот

*Приклад 13.3.* За заданим інтервальним статистичним розподілом вибірки (див. табл. 13.2).

*Таблиця 13.2*

Вихідні дані до прикладу 13.3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *h=8* | 0 - 8 | 8 - 16 | 16 - 24 | 24 - 32 | 32 - 40 | 40 - 48 |
|  | 10 | 15 | 20 | 25 | 20 | 10 |
|  | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,2 | 0,1 |

Потрібно побудувати гістограму частот і відносних частот. Р*озв’язання.*Гістограми



частот і відносних частот наведені на рис. 13.3 та 13.4.

Рис. 13.3 Гістограма частот



Рис. 13.4 Гістограма відносних частот

Площа гістограми частот 

Площа гістограми відносних частот 

*Приклад 13.4.* За заданим інтервальним статистичним розподілом вибірки (див. табл. 13.3) побудувати гістограму частот і *F\*(х).* Визначити Мо\*, Ме\*.

*Таблиця 13.3*

Вихідні дані до прикладу 13.4

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *h=4* | 0–4 | 4–8 | 8–12 | 12–16 | 16–20 | 20–24 |
| *ni* | 6 | 14 | 20 | 25 | 30 | 5 |

*Розв'язання.* Гістограма частот зображена на рис. 13.5.

##### Рис. 13.5 Гістограма частот



Графік *F\*(х)*зображено на рис. 13.6.

###### Рис. 13.6 Емпірична функція розподілу



З рис. 13.5 визначається модальний інтервал, який дорівнює 16 – 20. Застосовуючи формулу для обчислення моди і беручи до уваги, що , , , , , дістанемо:





З графіка *F\*(х)*визначається медіанний інтервал, який дорівнює12 - 16.

Беручи до уваги, що ,  і застосовуючи формулу для обчислення медіани, дістанемо:





#### Задачі

13.1. При вивченні випадкової величини *X*урезультаті 40 незалежних спостережень дістали вибірку:10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9, 8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 8,7,9, 10, 14, 13,8,8, 9, 10, 11, 11, 12, 12. Побудувати дискретний статистичний розподіл для цієї вибірки, атакож полігон частот і *F\*(х).*Знайти моду та медіану.

13.2. П’ятдесят абітурієнтів на вступних іспитах з інформатики дістали таку кількість балів: 12,14,19,15,14,18,13,16,17,12, 20,17, 15, 13,17,16, 20, 14,14,13, 17, 16, 15, 19, 16, 15, 18, 17, 15, 14,16,15,15,18,15,15,19,14,16,18,18,15,15,17,15,16,16,14,14,17.Побудувати дискретний статистичний розподіл для цієї вибірки, атакож полігон частот і *F\*(х).*Знайти моду та медіану.

13.3. Через кожну годину вимірювалась напруга в електромережі. Результати вимірювання напруги у вольтах наведені у вигляді статистичного ряду:222, 219, 224, 220, 218, 217, 221, 220, 215, 218, 223, 225,220, 226, 221, 216, 211, 219, 220, 221, 222, 218, 221, 219. Побудувати дискретний статистичний розподіл для цієї вибірки, атакож полігон частот і *F\*(х).*Знайти моду та медіану.

13.4. З допомогою радіодальноміра було здійснено 16 вимірювань однієї і тієї ж відстані. Результати вимірювання в метрах наведені у вигляді статистичного ряду:201, 195, 207, 203, 191, 208, 198,210, 204, 192, 195, 211,206, 196,208,197. Потрібно: 1) побудувати дискретний статистичний розподіл, полігон відносних частотта*F\*(х)*; 2) обчислити моду і медіану.

13.5. Для обчислення середньої врожайності озимої пшениці  кооперативне поле площею 2000 га було поділено на 20 рівних ділянок . Фактичний урожай на кожній ділянці наведено в табл. 13.4.

*Таблиця 13.4*

Вихідні дані до задачі 13.5

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Хі,*ц/га | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
|  | 2 | 3 | 8 | 4 | 3 |

Потрібно:

1. Побудувати полігон відносних частот.

2. Знайти Мо, Ме.

13.6. На кожну сотню деталей, що їх виготовляє цех, у середньому припадає дві браковані. Було перевірено 10 партій по 100 деталей у кожній. Відхилення кількості виявлених бракованих деталей від середнього **наведено в табл. 13.5.

*Таблиця 13.5*

Вихідні дані до задачі 13.6

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Номер партії* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| *Хі* | -1 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 | 0 | -2 | 2 | 1 |

Потрібно:

1. Побудувати дискретний статистичний розподіл, полігон частот і *F\*(х).*

2. Знайти Мо, Ме.

13.7. Для заданої вибірки із генеральної сукупності скласти розподіли частот та відносних частот:

а) 7, 4, 4, 8, 12, 12, 12, 7, 8, 12, 8, 12, 4, 12, 12, 4, 12, 4,1 2, 12;

б) 6, 9, 5, 3, 6, 6, 9, 3, 5, 6, 9, 5, 6, 6, 9, 6, 9, б, 6, 6;

в) 2, 2, 8, 5, 4, 2, 5, 4, 2, 8, 8, 2, 4, 8, 2, 2, 8, 2, 2, 2.

13.8. У результаті спостереження одержали такі значення ознаки X: -3, 2, -1, -3, 5, -3, 2. Побудувати полігон частот цієї вибірки.

13.9. У результаті спостереження одержали розподіл ознаки X вибірки у вигляді (див. табл. 13.6).

*Таблиця 13.6*

Вихідні дані до задачі 13.9

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 |
|  | 4 | 5 | 7 | 8 | 6 | 2 | 1 |

Побудувати гістограму частот цього розподілу.

13.10. Побудувати гістограму відносних частоти заданого розподілу (див. табл. 13.7).

*Таблиця 13.7*

Вихідні дані до задачі 13.10

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Інтервали h=5* | 5-10 | 10-15 | 15-20 | 20-25 | 25-30 | 30-35 | 35-40 |
| *Частоти варіант* | 4 | 6 | 16 | 36 | 24 | 10 | 4 |

13.11. Для заданої вибірки із генеральної сукупності скласти розподіли частот та відносних частот, побудувати емпіричну функцію розподілу, полігон та гістограму частот та відносних частот:

а) 7, 5, 5, 8, 14, 12, 14, 7, 8, 12, 5, 12, 12, 5, 14, 5, 12, 12;

б) 7, 3, 10, 4, 7, 7, 3, 4, 10, 3, 7, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 7, 7.

13.12. Знайти емпіричну функцію заданого розподілу вибірки та побудувати її графік (див. табл. 13.8).

*Таблиця 13.8*

Вихідні дані до задачі 13.12

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 5 | 7 | 8 |
|  | 1 | 3 | 2 | 4 |

13.13. Знайти емпіричну функцію заданого розподілу вибірки та побудувати її графік (див. табл. 13.9).

*Таблиця 13.9*

Вихідні дані до задачі 13.13

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 4 | 6 | 8 |
|  | 10 | 15 | 25 | 14 |

13.14. Побудувати полігон частот та відносних частот заданого розподілу вибірки (див. табл. 13.10).

*Таблиця 13.10*

Вихідні дані до задачі 13.14

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 5 | 6 |
|  | 10 | 15 | 5 | 20 |

13.15. Побудувати полігон частот та відносних частот заданого розподілу вибірки (див. табл. 13.11).

*Таблиця 13.11*

Вихідні дані до задачі 13.15

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 15 | 20 | 25 | 30 |
|  | 10 | 15 | 30 | 20 |

13.16. Побудувати гістограму частот заданого розподілу вибірки (див. табл. 13.12).

*Таблиця 13.12*

Вихідні дані до задачі 13.16

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *інтервали* | (1, 5) | (5, 9) | (9, 13) | (13, 17) | (17, 21) |
| *частоти* | 10 | 20 | 50 | 12 | 8 |

13.17. Побудувати гістограму частот заданого розподілу вибірки (див. табл. 13.13).

*Таблиця 13.13*

Вихідні дані до задачі 13.17

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *інтервали* | (3, 5) | (5, 7) | (7, 9) | (9, 11) | (11, 13) | (13, 15) | (15, 17) |
| *частоти* | 4 | 6 | 20 | 40 | 20 | 4 | 6 |

13.18. Маємо вибірку з 20 елементів: 7, 10, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 13, 15, 14, 15, 14, 16, 12, 16, 14, 14, 16, 15. Виконати такі вправи:

а) побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію розподілу;

б) побудувати полігон і гістограму частот та відносних частот, розбивши інтервал на чотири рівні підінтервали;

в) знайти моду та медіану.

13.19. Маємо вибірку з 20 елементів: 8, 5, 7, 9, 10, 9, 8, 4, 7, 8, 10, 9, 4, 8, 11, 9, 11, 8, 10, 11. Виконати такі вправи:

а) побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію розподілу;

б) побудувати полігон і гістограму частот та відносних частот, розбивши інтервал на чотири рівні підінтервали;

в) знайти моду та медіану.

13.20. Маємо вибірку з 20 елементів: 3, 6, 9, 10, 6, 5, 11, 9, 7, 6, 7, 10, 9, 8, 11, 6, 5, 10, 8, 7. Виконати такі вправи:

а) побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію розподілу;

б) побудувати полігон і гістограму частот та відносних частот, розбивши інтервал на чотири рівні підінтервали;

в) знайти моду та медіану.

13.21. Вибірка задана у вигляді розподілу частот (див. табл. 13.14).

*Таблиця 13.14*

Вихідні дані до задачі 13.21

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 5 | 7 |
|  | 1 | 3 | 6 |

Знайти розподіл відносних частот. Зробити контроль.

13.22. Побудувати емпіричну функцію розподілу, гістограму та полігон частот вибірки, поданої у вигляді таблиці частот (див. табл. 13.15).

*Таблиця 13.15*

Вихідні дані до задачі 13.22

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *інтервал* | [- 3; -2) | [-2; -1) | [-1; 0) | [0; 1) | [1; 2) | [2; 3) | [3; 4) | [4; 5) |
|  | 3 | 10 | 15 | 24 | 25 | 13 | 7 | 3 |

13.23. Побудувати емпіричну функцію розподілу, гістограму та полігон частот вибірки, поданої у вигляді таблиці частот (див. табл. 13.16).

*Таблиця 13.16*

Вихідні дані до задачі 13.23

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *інтервал* | [0,2; 2,2) | [2,2; 4,2) | [4,2; 6,2) | [6,2; 8,2) | [8,2; 12,2) |
|  | 70 | 20 | 4 | 3 | 3 |

13.24. Обчислити моду та медіану для вибірки (див. табл. 13.17).

*Таблиця 13.17*

Вихідні дані до задачі 13.24

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *інтервал* | [-2; 0) | [0; 4) | [4; 6) | [6; 10) |
|  | 5 | 10 | 20 | 15 |

13.25. Обчислити моду та медіану для вибірки (див. табл. 13.18).

*Таблиця 13.18*

Вихідні дані до задачі 13.25

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *інтервал* | [-4; 0) | [0; 6) | [6; 10) | [10; 14) |
|  | 7 | 14 | 23 | 16 |

##### 14.Статистичні оцінки параметрів розподілу: точкові оцінки

Самостійна робота - год.

*Зміст*:

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

*Література*:

**Методичні вказівки.**

**Точковою** називають статистичну оцінку, яка визначається одним числом.

**Незміщеною** називають точкову оцінку, математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру при будь-якому об’ємі вибірки.

**Незміщеною оцінкою** генеральної середньої (математичного сподівання) є вибіркова середня:

,

де – варіанта вибірки;

– частота варіанти ;

– об’єм вибірки.

*Зауваження 1.* Якщо початкові варіанти – великі числа, то для спрощення обрахунків потрібно відняти від кожної варіанти одне і те ж число С, тобто потрібно перейти до умовних варіант: .Тоді:

.

За С вигідно брати число, близьке до вибіркової середньої.

Зміщеною оцінкою генеральної дисперсії є вибіркова середня:



Більш зручна формула:



*Зауваження 2.* Якщо початкові варіанти – великі числа, то для спрощення обрахунків потрібно відняти від кожної варіанти одне і те ж число С, яке дорівнює вибірковій середній або близьке до неї, тобто потрібно перейти до умовних варіант:  (дисперсія при цьому не зміниться).Тоді:



*Зауваження 3.* Якщо початкові варіанти є десятковими дробами з k десятковими знаками після коми, то щоб уникнути дій з дробами, можна помножити на постійне число , тобто потрібно перейти до умовних варіант: . При цьому дисперсія збільшиться в  разів. Тому, після обрахунку дисперсії в умовних варіантах, необхідно розділити її на :

.

Незміщеною оцінкою генеральної дисперсії є виправлена вибіркова дисперсія:



Більш зручна формула:



В умовних варіантах вона має вигляд:



причому, якщо , то якщо , то 

Вибірковим **середньоквадратичним відхиленням** називають квадратний корінь з вибіркової дисперсії:



Виправленим середньоквадратичним відхиленням буде 

Розмахом варіації називають різницю між найбільшою та найменшою варіантами 

Для порівняння оцінок варіацій статистичних рядів із різними значеннями , які не дорівнюють нулеві, вводиться коефіцієнт варіації, який обчислюється за формулою:



**Розв’язок типових задач**

*Приклад 14.1.* За даним статистичним розподілом вибірки (див. табл. 14.1):

1. Обчислити незміщену оцінку генеральної середньої.
2. Знайти дисперсію та виправлену дисперсію.
3. Обчислити середнє квадратичне відхилення та виправлене середньоквадратичне відхилення.
4. Знайти розмах варіації та коефіцієнт варіації.

*Таблиця 14.1*

Вихідні дані до прикладу 14.1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2,5 | 4,5 | 6,5 | 8,5 | 10,5 |
|  | 10 | 20 | 30 | 30 | 10 |

*Розв’язання.* Незміщеною оцінкою генеральної середньої є вибіркова середня. Оскільки , то:



1. Для обчислення вибіркової дисперсії визначимо:



Тоді:



2. Виправлена дисперсія матиме вигляд:



3. Знайдемо середньоквадратичне відхилення: 

Тоді виправленим середньоквадратичним відхиленням буде:



4. – розмах варіації.

– коефіцієнт варіації.

**Задачі**

14.1. Вибіркова сукупність задана табл. 14.2.

*Таблиця 14.2*

Вихідні дані до задачі 14.1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 20 | 15 | 10 | 5 |

Знайти вибіркові характеристики.

14.2. Вимірювальним приладом, який не має систематичних похибок, були зроблені незалежні вимірювання деякої величини. Знайти незміщені оцінки математичного сподівання та дисперсії цієї величини за даними результатами вимірювань:

а) 8,9,11,12;

б) 4,6,10,204;

в) 2,3,5,10;

г) 5,15,10,20.

14.3. Знайти вибіркові середню та дисперсію заданої вибірки (див. табл. 14.3).

*Таблиця 14.3*

Вихідні дані до задачі 14.3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 18,6 | 19 | 19,4 | 19,8 | 20,2 | 20,6 |
|  | 4 | 6 | 30 | 40 | 18 | 2 |

14.4. Знайти вибіркові середню та дисперсію заданої вибірки (див. табл. 14.4, 14.5 та 14.6).

а)

*Таблиця 14.4*

Вихідні дані до задачі 14.4

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 |
|  | 5 | 15 | 50 | 16 | 10 | 4 |

б)

*Таблиця 14.5*

Вихідні дані до задачі 14.4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 |
|  | 2 | 5 | 25 | 15 | 3 |

в) 2,30; 2,28; 2,29; 2,28; 2,30; 2,28; 2,32; 2,29; 2,31; 2,32; 2,31; 2,30; 2,32; 2,30; 2,31; 2,30; 2,284 2,29; 2,28; 2,30; 2,28; 2,32; 2,29; 2,31; 2,32; 2,31; 2,30; 2,32; 2,30; 2,31.

г)

*Таблиця 14.6*

Вихідні дані до задачі 14.4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 7,14 | 7,221 | 7,28 | 7,35 | 7,42 | 7,49 | 7,56 | 7,63 |
|  | 2 | 9 | 24 | 43 | 51 | 37 | 25 | 8 |

14.5. За даним інтервальним статистичним розподілом вибірки, в якому наведено розподіл маси новонароджених  (див. табл. 14.7). Обчислити вибіркові характеристики.

*Таблиця 14.7*

Вихідні дані до задачі 14.5

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2-2,2 | 2,2-2,4 | 2,4-2,6 | 2,6-2,8 | 2,8-3 | 3-3,2 | 3,2-3,4 | 3,4-3,6 |
|  | 5 | 12 | 18 | 22 | 36 | 24 | 19 | 15 |

14.6. Із генеральної сукупності взята вибірка об’ємом *п*=50 (див. табл. 14.8).

*Таблиця 14.8*

Вихідні дані до задачі 14.6

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 5 | 7 | 10 |
|  | 16 | 12 | 8 | 14 |

Знайти незміщену оцінку генеральної середньої.

14.7. Із генеральної сукупності взята вибірка об’ємом *п*=60 (див. табл. 14.9). Знайти незміщену оцінку генеральної середньої.

*Таблиця 14.9*

Вихідні дані до задачі 14.7

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 | 6 | 26 |
|  | 8 | 40 | 10 | 2 |

14.8. Дано розподіл початкових варіант вибірки об’ємом *п*(див. табл. 14.10).

*Таблиця 14.10*

Вихідні дані до задачі 14.8

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | *...* |  |
|  |  |  | *...* |  |

Довести, що , де умовні варіанти .

14.9. Знайти вибіркову середню за даним розподілом вибірки об’ємом *п*=10 (див. табл. 14.11).

*Таблиця 14.11*

Вихідні дані до задачі 14.9

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1250 | 1270 | 1280 |
|  | 2 | 5 | 3 |

14.10. Знайти вибіркову середню за даним розподілом вибірки об’ємом *п*=20 (див. табл. 14.12).

*Таблиця 14.12*

Вихідні дані до задачі 14.10

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2560 | 2600 | 2620 | 2650 | 2700 |
|  | 2 | 3 | 10 | 4 | 1 |

14.11. По вибірці об’ємом *п*=51 знайдена зміщена оцінка  генеральної дисперсії. Знайти незміщену оцінку дисперсії генеральної сукупності.

14.12. В результаті п’яти вимірів довжини стержня одним прибором (без систематичних помилок) отримали такі результати (в мм): 92,94, 103, 105, 106. Знайти:

а) вибіркову середню довжини стержня;

б) вибіркову і виправлену дисперсії похибок пристрою.

14.13. В результаті чотирьох вимірювань деякої фізичної величини одним прибором (без систематичних помилок) отримали такі результати: 8, 9, 11, 12. Знайти:

а) вибіркову середню результатів вимірювань;

б) вибіркову та виправлену дисперсії похибок пристрою.

14.14.Знайти виправлену дисперсію за даним розподілом вибірки об’ємом *п*=10 (див. табл. 14.13).

*Таблиця 14.13*

Вихідні дані до задачі 14.14

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 186 | 192 | 194 |
|  | 2 | 5 | 3 |

14.15.Знайти вибіркову середню та дисперсію, виправлені дисперсію та середньоквадратичне відхилення за даним розподілом вибірки об’ємом *п*=100 (див. табл. 14.14).

*Таблиця 14.14*

Вихідні дані до задачі 14.15

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 340 | 360 | 375 | 380 |
|  | 20 | 50 | 18 | 12 |

14.16 .Знайти виправлену вибіркову дисперсію за даним розподілом вибірки об’ємом *п*=10, використовуючи умовні варіанти (див. табл. 14.15).

*Таблиця 14.15*

Вихідні дані до задачі 14.16

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 102 | 104 | 108 |
|  | 2 | 3 | 5 |

14.17. Знайти виправлену вибіркову дисперсію та коефіцієнт варіації за даним розподілом вибірки об’ємом *п*=100 (див. табл. 14.16).

*Таблиця 14.16*

Вихідні дані до задачі 14.17

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1250 | 1275 | 1280 | 1300 |
|  | 20 | 25 | 50 | 5 |

14.18. Знайти виправлену вибіркову дисперсію та коефіцієнт варіації за даним розподілом вибірки об’ємом *п*=10 (див. табл. 14.17).

*Таблиця 14.17*

Вихідні дані до задачі 14.18

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0,01 | 0,05 | 0,09 |
|  | 2 | 3 | 5 |

14.19. Знайти виправлену вибіркову дисперсію за даним розподілом вибірки об’ємом *п*=20, (використовуючи умовні варіанти) (див. табл. 14.18).

*Таблиця 14.18*

Вихідні дані до задачі 14.19

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,1 | 0,5 | 0,7 | 0,9 |
|  | 6 | 12 | 1 | 1 |

14.20. Знайти виправлену вибіркову дисперсію за даним розподілом вибірки об’ємом *п*=10, (використовуючи умовні варіанти) (див. табл. 14.19).

*Таблиця 14.19*

Вихідні дані до задачі 14.20

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 23,5 | 6,1 | 28,2 | 30,4 |
|  | 2 | 3 | 4 | 1 |

##### 15.Інтервальні оцінки

Самостійна робота - год.

*Зміст*:

*Форма самостійної роботи*: вивчення теоретичного матеріалу, виконання практичних завдань

*Література*:

**Методичні вказівки.**

**Інтервальною** називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу, який покриває оцінюваний параметр.

**Довірчим** називають інтервал, який із заданою надійністю γ покриває оцінюваний параметр.

Для оцінки математичного сподівання α нормально розподіленої кількісної оцінки *x* по вибірковій середній , коли відоме середньоквадратичне відхилення δ генеральної сукупності, використовується довірчий інтервал:

,

де  – точність оцінки;

n – об’єм вибірки;

t – значення аргументу функції Лапласа , при якому ;  (див. у додаткуA).

Якщоδ невідоме і об’єм вибірки n>30, то використовується довірчий інтервал:

,

де S – виправлене середньоквадратичне відхилення;

t–знаходять за таблицями (в додаткуA), яке дорівнює .

Для оцінки середньоквадратичного відхилення δ нормально розподіленої кількісної ознаки *χ* з надійністю γ за виправленим вибірковим середньоквадратичним відхиленням Sвикористовуються довірчі інтервали:

 (якщо q<1)

 (якщо q>1).

**Розв’язок типових задач**

*Приклад 15.1.* Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю 0,95 невідомого математичного сподівання α нормально розподіленої ознаки *х* генеральної сукупності, якщо дано генеральне середнє квадратичне відхилення σ=5, вибіркова середня  = 14, об’єм вибірки n = 25.

*Розв’язок.* Потрібно знайти довірчий інтервал . Нам відомі всі величини, крім t. Знайдемо t. Із співвідношення 2Ф(t) = 0,95 маємо Ф(t) =0,475. За таблицею (додаток) знаходимо t = 1,96. Підставивши t = 1,96,  = 14, σ = 5, n=25 в формулу, отримаємо шуканий довірчий інтервал: 12,04<*а*<15,96.

*Приклад 15.2.* Знайти мінімальний об’єм вибірки, при якому з надійністю 0,975 точність оцінки математичного сподівання α генеральної сукупності за вибірковою середньою буде дорівнювати δ = 0,3, якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ = 1,2 нормально розподіленої генеральної сукупності.

*Розв’язок.* Скористаємося формулою, яка визначає точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності за вибірковою середньою:

.

Звідси: .

За умовою γ = 0,975 або 2Ф(t) = 0,975. Тоді Ф(t) = 0,4875. За таблицею знайдемо t = 2,24. Підставивши t = 2,24, σ = 1,2 і δ = 0,2 у формулу, отримаємо шуканий об’єм вибірки n = 81.

**Задачі**

15.1. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю 0,99 невідомого математичного сподівання α нормально розподіленої ознаки χ генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середньоквадратичне відхилення σ = 4, вибіркова середня  = 10,2 та об’єм вибірки n = 16.

15.2. Одним і тим же пристроєм, який має середньоквадратичне відхилення випадкових помилок вимірів σ = 40 м, проведено S рівноточних вимірювань відстані від зброї до цілі. Знайти довірчий інтервал для оцінки відстані α до цілі з надійністю γ = 0,95, знаючи середнє арифметичне результатів вимірювань  = 2000 м.

15.3. Вибірка із великої партії електроламп складає 100 ламп. Середній період горіння лампи вибірки дорівнює 1000 годин. Знайти з надійністю 0,95 довірчий інтервал для середнього періоду α горіння лампи всієї партії, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення періоду горіння σ = 40 годин.

15.4. Станок-автомат штампує валики. По вибірці об’єму n = 100 порахована вибіркова середня діаметрів виготовлених валиків. Знайти з надійністю 0,95 точність δ, з якою вибіркова середня оцінює математичне сподівання діаметрів валиків, що виготовляються, знаючи, що їх середньоквадратичне відхилення σ = 2 мм.

15.5. Знайти мінімальний об’єм вибірки, при якому з надійністю 0,925 точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності за вибірковою середньою буде дорівнювати 0,2, якщо відоме середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності σ = 1,5.

15.6. Знайти мінімальний об’єм вибірки, за якого з надійністю 0,925 точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності за вибірковою середньою буде дорівнювати 0,4, якщо відомо середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності σ = 1,8.

15.7. Із генеральної сукупності взята вибірка об’ємом n = 10 (див. табл. 15.1).

*Таблиця 15.1*

Вихідні дані до задачі 15.7

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***χі*** | - 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ***ni*** | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |

Оцінити з надійністю 0,95 математичне сподівання α нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності за вибірковою середньою, використовуючи довірчий інтервал.

15.8. Із генеральної сукупності взята вибірка об’ємом n = 12 (див. табл. 15.2).

*Таблиця 15.2*

Вихідні дані до задачі 15.8

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***χі*** | - 0,5 | - 0,4 | - 0,2 | 0 | 0,2 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1,2 | 1,5 |
| ***ni*** | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |

Оцінити з надійністю 0,95 математичне сподівання α нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності за допомогою довірчого інтервалу.

15.9. За даними 9 незалежних рівноточних вимірювань деякої фізичної величини відомі середнє арифметичне результатів вимірювань  = 30,1 та виправлене середньоквадратичне відхилення S = 6. Оцінити дійсне значення вимірюваної величини за допомогою довірчого інтервалу з надійністю γ = 0,99.

15.10. За даними 16 незалежних рівноточних вимірювань деякої фізичної величини відомі середнє арифметичне  = 42,8 та виправлене середньоквадратичне відхилення S = 8. Оцінити дійсне значення вимірюваної величини з надійністю γ = 0,999.

15.11. За даними вибірки об’ємом n = 16 із генеральної сукупності знайдено виправлене середньоквадратичне відхилення S = 1 нормально розподіленої кількісної ознаки. Знайти довірчий інтервал, який покриває генеральне середньоквадратичне відхилення σ з надійністю 0,95.

15.12. За даними вибірки об’ємом n із генеральної сукупності нормально розподіленої кількісної ознаки відомо виправлене середньоквадратичне відхилення S. Знайти довірчий інтервал, який покриває генеральне середньоквадратичне відхилення σ з надійністю 0,999, якщо: а) n = 10,S = 5,1, б) n = 50,S = 14.

15.13. Провели 12 вимірювань одним пристроєм (без систематичних помилок) деякої фізичної величини, при цьому виправлене середньоквадратичне відхилення Sвипадкових помилок вимірювання виявилось рівним 0,6. Знайти точність пристрою з надійністю 0,99.

*Вказівка.* Оскільки точність пристрою характеризується середнім квадратичним відхиленням випадкових помилок вимірювань, тому задача зводиться до відшукання довірчого інтервалу.

15.14. Проведено 10 вимірювань одним пристроєм (без систематичних помилок) деякої фізичної величини, при цьому виправлене середньоквадратичне відхилення випадкових помилок вимірювання виявилось рівним 0,8. Знайти точність пристрою з надійністю 0,95.

*Вказівка.* Оскільки точність пристрою характеризується середнім квадратичним відхиленням випадкових помилок вимірювань, тому задача зводиться до відшукання довірчого інтервалу.

15.15. Вимірявши 40 випадково відібраних після виготовлення деталей, знайшли вибіркову середню, що дорівнює 15 см. Із надійністю γ = 0,99 побудувати довірчий інтервал для середньої величини всієї партії деталей, якщо генеральна дисперсія дорівнює 0,09 см2.

15.16. Маємо такі дані про розміри основних фондів (у млн. грн.) на 30-ти випадково вибраних підприємствах:

4,2; 2,4; 4,9; 6,7; 4,5; 2,7; 3,9; 2,1; 5,8; 4,0;

2,8; 7,8; 4,4; 6,6; 2,0; 6,2; 7,0; 8,1; 0,7; 6,8;

9,4; 7,6; 6,3; 8,8; 6,5; 1,4; 4,6; 2,0; 7,2; 9,1.

Побудувати інтервальний статистичний розподіл із довжиною кроку h=2млн. грн. З надійністю γ = 0,999 знайти довірчий інтервал для , якщо =5 млн. грн.

15.17. Якого значення має набувати надійність оцінки γ, щоб за обсягу вибірки n=100 похибка її не перевищувала 0,01 при  = 5.

15.18 Визначити обсяг вибірки n, за якого похибка, що дорівнює 0,01, гарантується з ймовірністю 0,999, якщо  = 5.

15.19. Випадково вибрана партія з двадцяти приладів була випробувана щодо терміну безвідмовної роботи кожного з них. Результати випробувань наведено у вигляді дискретного статистичного розподілу (див. табл. 15.3).

*Таблиця 15.3*

Вихідні дані до задачі 15.19

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***χі*** | 100 | 170 | 240 | 310 | 380 |
| ***ni*** | 2 | 5 | 10 | 2 | 1 |

З надійністю γ = 0,99 побудувати довірчий інтервал для середнього часу безвідмовної роботи приладу α.

15.20. У таблиці 15.14 наведено відхилення діаметрів валиків, оброблених на верстаті, від номінального розміру.

*Таблиця 15.14*

Вихідні дані до задачі 15.20

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***h = 5MK*** | 0 – 5 | 5 – 10 | 10 – 15 | 15 – 20 | 20 – 25 |
| ***ni*** | 15 | 75 | 100 | 50 | 10 |

Із надійністю γ = 0,99 побудувати довірчий інтервал для  = α.

##### Список використаної літератури

1. Амманов С. С. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 293 с.
2. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Київ: ЦУЛ, 2002. – 448 с.
3. Бугір М. К. Посібник з теорії ймовірності та математичної статистики. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 176 с.
4. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища шк. Гол. вид-во, 1988. – 320 с.
5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.
6. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987. – 400 с.
7. Жлухтенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. – Ч. 1. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.
8. Жлухтенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. – Ч. 2. Математична статистика. – К.: КНЕУ, 2001. – 336 с.
9. Турчин В. М. Математична статистика. Посібник. – К.: Видавничий центр „Академія”, 1999. – 240 с.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. – 3-е изд. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 527 с.; Т. 2. – 751 с.
11. Черняк О. І., Обушна О. М., Ставицький А. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: Збірник задач: Навч. посіб. – К.: Т-во „Знання”, КОО, 2001. – 199 с.

##### ДОДАТОК А

**ЗНАЧЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА **

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | *Ф(х)* | *х* | *Ф(х)* | *х* | *Ф(х)* | *х* | *Ф(х)* |
| 0,00 | 0,0000 | 0,26 | 0,1026 | 0,52 | 0,1985 | 0,78 | 0,2823 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,27 | 0,1064 | 0,53 | 0,2019 | 0,79 | 0,2852 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,28 | 0,1103 | 0,54 | 0,2054 | 0,80 | 0,2881 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,29 | 0,1141 | 0,55 | 0,2088 | 0,81 | 0,2910 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,30 | 0,1179 | 0,56 | 0,2123 | 0,820 | 0,2939 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,31 | 0,1217 | 0,57 | 0,2157 | 0,83 | 0,2967 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,32 | 0,1255 | 0,58 | 0,2190 | 0,84 | 0,2995 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,33 | 0,1293 | 0,59 | 0,2224 | 0,85 | 0,3023 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,34 | 0,1331 | 0,60 | 0,2257 | 0,86 | 0,3051 |
| 0,09 | 0,359 | 0,35 | 0,1368 | 0,61 | 0,2291 | 0,87 | 0,3078 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,36 | 0,1406 | 0,62 | 0,2324 | 0,88 | 0,3106 |
| 0,11 | 0,0438 | 0,37 | 0,1443 | 0,63 | 0,2357 | 0,89 | 0,3133 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,38 | 0,1480 | 0,64 | 0,2389 | 0,90 | 0,3159 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,39 | 0,1617 | 0,65 | 0,2422 | 0,91 | 0,3186 |
| 0,14 | 0,8557 | 0,40 | 0,1564 | 0,66 | 0,2454 | 0,92 | 0,3212 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,41 | 0,1691 | 0,67 | 0,2486 | 0,93 | 0,3238 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,42 | 0,1628 | 0,68 | 0,2517 | 0,94 | 0,3264 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,43 | 0,1664 | 0,69 | 0,2549 | 0,95 | 0,3289 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,44 | 0,1700 | 0,70 | 0,2580 | 0,96 | 0,3315 |
| 0,19 | 0,0753 | 0,45 | 0,1736 | 0,71 | 0,2611 | 0,97 | 0,3340 |
| 0,20 | 0,0793 | 0,46 | 0,1772 | 0,72 | 0,2642 | 0,98 | 0,3365 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,47 | 0,1808 | 0,73 | 0,2673 | 0,99 | 0,3389 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,48 | 0,1844 | 0,74 | 0,2703 | 1,00 | 0,3413 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,49 | 0,1879 | 0,75 | 0,2734 | 1,01 | 0,3438 |
| 0,24 | 0,0948 | 0,50 | 0,1915 | 0,76 | 0,2764 | 1,02 | 0,3461 |
| 0,25 | 0,0987 | 0,51 | 0,1950 | 0,77 | 0,2794 | 1,03 | 0,3485 |
| 1,04 | 0,3508 | 1,33 | 0,4082 | 1,62 | 0,4474 | 1,91 | 0,4719 |
| 1,05 | 0,3531 | 1,34 | 0,4099 | 1,63 | 0,4484 | 1,92 | 0,4726 |
| 1,06 | 0,3554 | 1,35 | 0,4115 | 1,64 | 0,4495 | 1,93 | 0,4732 |
| 1,07 | 0,3577 | 1,36 | 0,4131 | 1,65 | 0,4505 | 1,94 | 0,4738 |
| 1,08 | 0,3599 | 1,37 | 0,4147 | 1,66 | 0,4515 | 1,95 | 0,4744 |
| 1,09 | 0,3621 | 1,38 | 0,4162 | 1,67 | 0,4525 | 1,96 | 0,4750 |
| 1,10 | 0,3643 | 1,39 | 0,4177 | 1,68 | 0,4535 | 1,97 | 0,4756 |

Продовження додатку А

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | *Ф(х)* | *Х* | *Ф(х)* | *х* | *Ф(х)* | *х* | *Ф(х)* |
| 1,11 | 0,3665 | 1,40 | 0,4192 | 1,69 | 0,4545 | 1,98 | 0,4761 |
| 1,12 | 0,3686 | 1,41 | 0,4207 | 1,70 | 0,4554 | 1,99 | 0,4767 |
| 1,13 | 0,3708 | 1,42 | 0,4222 | 1,72 | 0,4564 | 2,00 | 0,4772 |
| 1,14 | 0,3729 | 1,43 | 0,4236 | 1,72 | 0,4573 | 2,02 | 0,4783 |
| 1,15 | 0,3749 | 1,44 | 0,4251 | 1,73 | 0,4582 | 2,04 | 0,4793 |
| 1,16 | 0,3770 | 1,45 | 0,4265 | 1,74 | 0,4591 | 2,06 | 0,4803 |
| 1,17 | 0,3790 | 1,46 | 0,4279 | 1,75 | 0,4599 | 2,08 | 0,4812 |
| 1,18 | 0,3810 | 1,47 | 0,4292 | 1,76 | 0,4608 | 2,10 | 0,4821 |
| 1,19 | 0,3830 | 1,48 | 0,4306 | 1,77 | 0,4616 | 2,12 | 0,4830 |
| 1,20 | 0,3849 | 1,49 | 0,4319 | 1,78 | 0,4625 | 2,14 | 0,4838 |
| 1,21 | 0,3869 | 1,50 | 0,4332 | 1,79 | 0,4633 | 2,16 | 0,4846 |
| 1,22 | 0,3883 | 1,51 | 0,4345 | 1,80 | 0,4641 | 2,18 | 0,4854 |
| 1,23 | 0,3907 | 1,52 | 0,4357 | 1,81 | 0,4649 | 2,20 | 0,4861 |
| 1,24 | 0,3925 | 1,53 | 0,4370 | 1,82 | 0,4656 | 2,22 | 0,4868 |
| 1,25 | 0,3944 | 1,54 | 0,4382 | 1,83 | 0,4664 | 2,24 | 0,4875 |
| 1,26 | 0,3962 | 1,55 | 0,4394 | 1,84 | 0,4671 | 2,26 | 0,4881 |
| 1,27 | 0,3980 | 1,56 | 0,4406 | 1,85 | 0,4678 | 2,28 | 0,4887 |
| 1,28 | 0,3997 | 1,57 | 0,4418 | 1,86 | 0,4686 | 2,30 | 0,4893 |
| 1,29 | 0,4015 | 1,58 | 0,4429 | 1,87 | 0,4693 | 2,32 | 0,4898 |
| 1,30 | 0,4032 | 1,59 | 0,4441 | 1,88 | 0,4699 | 2,34 | 0,4904 |
| 1,31 | 0,4049 | 1,60 | 0,4452 | 1,89 | 0,4706 | 2,36 | 0,49089 |
| 1,32 | 0,4066 | 1,61 | 0,4463 | 1,90 | 0,4713 | 2,38 | 0,4913 |
| 2,40 | 0,4918 | 2,60 | 0,4953 | 2,80 | 0,4974 | 3,20 | 0,49931 |
| 2,42 | 0,4922 | 2,62 | 0,4956 | 2,82 | 0,4976 | 3,40 | 0,49966 |
| 2,44 | 0,4927 | 2,64 | 0,4959 | 2,84 | 0,4977 | 3,60 | 0,499984 |
| 2,46 | 0,4931 | 2,66 | 0,4961 | 2,86 | 0,4979 | 3,80 | 0,499928 |
| 2,48 | 0,4934 | 2,68 | 0,4963 | 2,90 | 0,4981 | 4,00 | 0,499968 |
| 2,50 | 0,4938 | 2,70 | 0,4965 | 2,92 | 0,4982 | 5,00 | 0,499997 |
| 2,52 | 0,4941 | 2,72 | 0,4967 | 2,94 | 0,4984 |  |  |
| 2,54 | 0,4945 | 2,74 | 0,4969 | 2,96 | 0,49846 |  |  |
| 2,56 | 0,4948 | 2,76 | 0,4971 | 2,98 | 0,49856 |  |  |
| 2,58 | 0,4951 | 2,78 | 0,4973 | 3,00 | 0,49865 | x>5 | 0,5 |

**ДОДАТОК Б**

**КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ ФІШЕРА (F-РОЗПОДІЛУ)**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Рівень значущості 0,05 | | | | | | | | | |
| k1  k2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 12 | 24 | ∞ |
| 1 | 164,1 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 244,9 | 249,0 | 254,3 |
| 2 | 18,5 | 9,2 | 19,2 | 19,3 | 19,3 | 19,3 | 19,4 | 19,5 | 19,5 |
| 3 | 10,1 | 9,6 | 9,3 | 9,1 | 9,0 | 8,9 | 8,7 | 8,6 | 8,5 |
| 4 | 7,7 | 6,9 | 6,6 | 6,4 | 6,3 | 6,2 | 5,9 | 5,8 | 5,6 |
| 5 | 6,6 | 5,8 | 5,4 | 5,2 | 5,1 | 5,0 | 4,7 | 4,5 | 4,4 |
| 6 | 6,0 | 5,1 | 4,8 | 4,5 | 4,4 | 4,3 | 4,0 | 3,8 | 3,7 |
| 7 | 5,6 | 4,7 | 4,4 | 4,1 | 4,0 | 3,9 | 3,6 | 3,4 | 3,2 |
| 8 | 5,3 | 4,5 | 4,1 | 3,8 | 3,7 | 3,6 | 3,3 | 3,1 | 2,9 |
| 9 | 5,1 | 4,3 | 3,9 | 3,6 | 3,5 | 3,4 | 3,1 | 2,9 | 2,7 |
| 10 | 5,0 | 4,1 | 3,7 | 3,5 | 3,3 | 3,2 | 2,9 | 2,7 | 2,5 |
| 11 | 4,8 | 4,0 | 3,6 | 3,4 | 3,2 | 3,1 | 2,8 | 2,6 | 2,4 |
| 12 | 4,8 | 3,9 | 3,5 | 3,3 | 3,1 | 3,0 | 2,7 | 2,5 | 2,3 |
| 13 | 4,7 | 3,8 | 3,4 | 3,2 | 3,0 | 2,9 | 2,6 | 2,4 | 2,2 |
| 14 | 4,6 | 3,7 | 3,3 | 3,1 | 3,0 | 2,9 | 2,5 | 2,3 | 2,1 |
| 15 | 4,5 | 3,7 | 3,3 | 3,1 | 2,9 | 2,8 | 2,5 | 2,3 | 2,1 |
| 16 | 4,5 | 3,6 | 3,2 | 3,0 | 2,9 | 2,7 | 2,4 | 2,2 | 2,0 |
| 17 | 4,5 | 3,6 | 3,2 | 3,0 | 2,8 | 2,7 | 2,4 | 2,2 | 2,0 |
| 18 | 4,4 | 3,6 | 3,2 | 2,9 | 2,8 | 2,7 | 2,3 | 2,1 | 1,9 |
| 19 | 4,4 | 3,5 | 3,1 | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,3 | 2,1 | 1,8 |
| 20 | 4,4 | 3,5 | 3,1 | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,3 | 2,1 | 1,8 |
| 22 | 4,3 | 3,4 | 3,1 | 2,8 | 2,7 | 2,6 | 2,2 | 2,0 | 1,8 |
| 24 | 4,3 | 3,4 | 3,0 | 2,8 | 2,6 | 2,5 | 2,2 | 2,0 | 1,7 |
| 26 | 4,2 | 3,4 | 3,0 | 2,7 | 2,6 | 2,4 | 2,1 | 1,9 | 1,7 |
| 28 | 4,2 | 3,3 | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,4 | 2,1 | 1,9 | 1,6 |
| 30 | 4,2 | 3,3 | 2,9 | 2,7 | 2,5 | 2,4 | 2,1 | 1,9 | 1,6 |
| 40 | 4,1 | 3,2 | 2,9 | 2,6 | 2,5 | 2,3 | 2,0 | 1,8 | 1,5 |
| 60 | 4,0 | 3,2 | 2,8 | 2,5 | 2,4 | 2,3 | 1,9 | 1,7 | 1,4 |
| 120 | 3,9 | 3,1 | 2,7 | 2,5 | 2,3 | 2,2 | 1,8 | 1,6 | 1,3 |
| ∞ | 3,8 | 3,0 | 2,6 | 2,4 | 2,2 | 2,1 | 1,8 | 1,5 | 1,0 |

Продовження додатка Б

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Рівень значущості 0,01 | | | | | | | | | | |
| k1  k2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
| 1 | 4052 | 4999 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5981 | 6106 | 6234 | 6366 |
| 2 | 98,5 | 99,0 | 99,2 | 99,3 | 99,3 | 99,4 | 99,3 | 99,4 | 99,5 | 99,5 |
| 3 | 34,1 | 30,8 | 29,5 | 28,7 | 28,2 | 27,9 | 27,5 | 27,1 | 26,6 | 26,1 |
| 4 | 21,2 | 18,0 | 16,7 | 16,0 | 15,5 | 15,2 | 14,8 | 14,4 | 13,9 | 13,5 |
| 5 | 16,3 | 13,3 | 12,1 | 11,4 | 11,0 | 10,7 | 10,3 | 9,9 | 9,5 | 9,0 |
| 6 | 13,7 | 10,9 | 9,8 | 9,2 | 8,8 | 8,5 | 8,1 | 7,7 | 7,3 | 6,9 |
| 7 | 12,3 | 9,6 | 8,5 | 7,9 | 7,5 | 7,2 | 6,8 | 6,5 | 6,1 | 5,7 |
| 8 | 11,3 | 8,7 | 7,6 | 7,0 | 6,6 | 6,4 | 6,0 | 5,7 | 5,3 | 4,9 |
| 9 | 10,6 | 8,0 | 7,0 | 6,4 | 6,1 | 5,8 | 5,5 | 5,1 | 4,7 | 4,3 |
| 10 | 10,0 | 7,6 | 6,6 | 6,0 | 5,6 | 5,4 | 5,1 | 4,7 | 4,3 | 3,9 |
| 11 | 9,7 | 7,2 | 6,2 | 5,7 | 5,3 | 5,1 | 4,7 | 4,4 | 4,0 | 3,6 |
| 12 | 9,3 | 6,9 | 6,0 | 5,4 | 5,1 | 4,8 | 4,5 | 4,2 | 3,8 | 3,4 |
| 13 | 9,1 | 6,7 | 5,7 | 5,2 | 4,9 | 4,6 | 4,3 | 4,0 | 3,6 | 3,2 |
| 14 | 8,9 | 6,5 | 5,6 | 5,0 | 4,7 | 4,5 | 4,1 | 3,8 | 3,4 | 3,0 |
| 15 | 8,7 | 6,4 | 5,4 | 4,9 | 4,6 | 4,3 | 4,0 | 3,7 | 3,3 | 2,9 |
| 16 | 8,5 | 6,2 | 5,3 | 4,8 | 4,4 | 4,2 | 3,9 | 3,6 | 3,2 | 2,8 |
| 17 | 8,4 | 6,1 | 5,2 | 4,7 | 4,3 | 4,1 | 3,8 | 3,5 | 3,1 | 2,7 |
| 18 | 8,3 | 6,0 | 5,1 | 4,6 | 4,3 | 4,0 | 3,7 | 3,4 | 3,0 | 2,6 |
| 19 | 8,2 | 5,9 | 5,0 | 4,5 | 4,2 | 3,9 | 3,6 | 3,3 | 2,9 | 2,4 |
| 20 | 8,1 | 5,9 | 4,9 | 4,4 | 4,1 | 3,9 | 3,6 | 3,2 | 2,9 | 2,4 |
| 22 | 7,9 | 5,7 | 4,8 | 4,3 | 4,0 | 3,8 | 3,5 | 3,1 | 2,8 | 2,3 |
| 24 | 7,8 | 5,6 | 4,7 | 4,2 | 3,9 | 3,7 | 3,3 | 3,0 | 2,7 | 2,2 |
| 26 | 7,7 | 5,5 | 4,6 | 4,1 | 3,8 | 3,6 | 3,3 | 3,0 | 2,6 | 2,1 |
| 28 | 7,6 | 5,5 | 4,6 | 4,1 | 3,8 | 3,5 | 3,2 | 2,9 | 2,5 | 2,1 |
| 30 | 7,6 | 5,4 | 4,5 | 4,0 | 3,7 | 3,5 | 3,2 | 2,8 | 2,5 | 2,0 |
| 40 | 7,3 | 5,2 | 4,3 | 3,8 | 3,5 | 3,3 | 3,0 | 2,7 | 2,3 | 1,8 |
| 60 | 7,1 | 5,0 | 4,1 | 3,7 | 3,3 | 3,1 | 2,8 | 2,5 | 2,1 | 1,6 |
| 120 | 6,9 | 4,8 | 4,0 | 3,5 | 3,2 | 3,0 | 2,7 | 2,3 | 2,0 | 1,4 |
| ∞ | 6,6 | 4,6 | 3,8 | 3,3 | 3,0 | 2,8 | 2,5 | 2,2 | 1,8 | 1,0 |

Закінчення додатка Б

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Рівень значущості 0,001 | | | | | | | | | | |
| k1  k2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
| 1 | Змінюється від 400 000 до 600 000 | | | | | | | | | |
| 2 | 998 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 |
| 3 | 167 | 148 | 141 | 137 | 135 | 133 | 131 | 128 | 126 | 123 |
| 4 | 74,1 | 61,3 | 56,2 | 53,4 | 51,7 | 50,5 | 49,0 | 47,4 | 45,8 | 44,1 |
| 5 | 47,0 | 36,6 | 33,2 | 31,1 | 29,8 | 28,8 | 27,6 | 26,4 | 25,1 | 23,8 |
| 6 | 35,5 | 27,0 | 23,7 | 21,9 | 20,8 | 20,0 | 19,0 | 18,0 | 16,9 | 15,8 |
| 7 | 29,2 | 21,7 | 18,8 | 17,2 | 16,2 | 15,5 | 14,6 | 13,7 | 12,7 | 11,7 |
| 8 | 25,4 | 18,5 | 15,8 | 14,4 | 13,5 | 12,9 | 12,0 | 11,2 | 10,3 | 9,3 |
| 9 | 22,9 | 16,4 | 13,9 | 12,6 | 11,7 | 11,1 | 10,4 | 9,6 | 8,7 | 7,8 |
| 10 | 21,0 | 14,9 | 12,6 | 11,3 | 10,5 | 9,9 | 9,2 | 8,5 | 7,6 | 6,8 |
| 11 | 19,7 | 13,8 | 11,6 | 10,4 | 9,6 | 9,1 | 8,3 | 7,6 | 6,9 | 6,0 |
| 12 | 18,6 | 13,0 | 10,8 | 9,6 | 8,9 | 8,4 | 7,7 | 7,0 | 6,3 | 5,4 |
| 13 | 17,8 | 12,3 | 10,2 | 9,1 | 8,4 | 7,9 | 7,2 | 6,5 | 5,8 | 5,0 |
| 14 | 17,1 | 11,8 | 9,7 | 8,6 | 7,9 | 7,4 | 6,8 | 6,1 | 5,4 | 4,6 |
| 15 | 16,6 | 11,3 | 9,3 | 8,3 | 7,6 | 7,1 | 6,5 | 5,8 | 5,1 | 4,3 |
| 16 | 16,1 | 11,0 | 9,0 | 7,9 | 7,3 | 6,8 | 6,2 | 5,6 | 4,9 | 4,1 |
| 17 | 15,7 | 10,7 | 8,7 | 7,7 | 7,0 | 6,6 | 6,0 | 5,3 | 4,6 | 3,9 |
| 18 | 15,4 | 10,4 | 8,5 | 7,5 | 6,8 | 6,4 | 5,8 | 5,1 | 4,5 | 3,7 |
| 19 | 15,1 | 10,2 | 8,3 | 7,3 | 6,6 | 6,2 | 5,6 | 5,0 | 4,3 | 3,5 |
| 20 | 14,8 | 10,0 | 8,1 | 7,1 | 6,5 | 6,0 | 5,4 | 4,8 | 4,2 | 3,4 |
| 22 | 14,4 | 9,6 | 7,8 | 6,8 | 6,2 | 5,8 | 5,2 | 4,6 | 3,9 | 3,2 |
| 24 | 14,0 | 9,3 | 7,6 | 6,6 | 6,0 | 5,6 | 5,0 | 4,4 | 3,7 | 3,0 |
| 26 | 13,7 | 9,1 | 7,4 | 6,4 | 5,8 | 5,4 | 4,8 | 4,2 | 3,6 | 2,8 |
| 28 | 13,5 | 8,9 | 7,2 | 6,3 | 5,7 | 5,2 | 4,7 | 4,1 | 3,5 | 2,7 |
| 30 | 13,3 | 8,8 | 7,1 | 6,1 | 5,5 | 5,1 | 4,6 | 4,0 | 3,4 | 2,6 |
| 40 | 12,6 | 8,2 | 6,6 | 5,7 | 5,1 | 4,7 | 4,2 | 3,6 | 3,0 | 2,2 |
| 60 | 12,0 | 7,8 | 6,2 | 5,3 | 4,8 | 4,4 | 3,9 | 3,3 | 2,7 | 1,9 |
| 120 | 11,4 | 7,3 | 5,8 | 5,0 | 4,4 | 4,0 | 3,5 | 3,0 | 2,4 | 1,6 |
| ∞ | 10,8 | 6,9 | 5,4 | 4,6 | 4,1 | 3,7 | 3,3 | 2,7 | 2,1 | 1,0 |

**ДОДАТОК В**

**ЗНАЧЕННЯ ЛОКАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* |
| 0.0 | 0.3989 | 0.3989 | 0.3989 | 0.3988 | 0.3986 |
| 0.1 | 0.3970 | 0.3965 | 0.3961 | 0.3956 | 0.3951 |
| 0.2 | 0.3910 | 0.3902 | 0.3894 | 0.3885 | 0.3876 |
| 0.3 | 0.3814 | 0.3802 | 0.3790 | 0.3778 | 0.3765 |
| 0.4 | 0.3683 | 0.3668 | 0.3653 | 0.3637 | 0.3621 |
| 0.5 | 0.3521 | 0.3503 | 0.3485 | 0.3467 | 0.3448 |
| 0.6 | 0.3332 | 0.3312 | 0.3292 | 0.3271 | 0.3251 |
| 0.7 | 0.3123 | 0.3101 | 0.3079 | 0.3056 | 0.3034 |
| 0.8 | 0.2897 | 0.2874 | 0.2850 | 0.2827 | 0.2903 |
| 0.9 | 0.2661 | 0.2637 | 0.2613 | 0.2589 | 0.2565 |
| 1.0 | 0.2420 | 0.2396 | 0.2371 | 0.2347 | 0.2323 |
| 1.1 | 0.2179 | 0.2155 | 0.2131 | 0.2107 | 0.2083 |
| 1.2 | 0.1942 | 0.1919 | 0.1876 | 0.1872 | 0.1849 |
| 1.3 | 0.1714 | 0.1691 | 0.1669 | 0.1647 | 0.1626 |
| 1.4 | 0.1497 | 0.1476 | 0.1456 | 0.1435 | 0.1415 |
| 1.5 | 0.1295 | 0.1276 | 0.1257 | 0.1238 | 0.1219 |
| 1.6 | 0.1109 | 0.1092 | 0.1074 | 0.1057 | 0.1040 |
| 1.7 | 0.0940 | 0.0925 | 0.0909 | 0.0893 | 0.0878 |
| 1.8 | 0.0790 | 0.0775 | 0.0761 | 0.0748 | 0.0737 |
| 1.9 | 0.0656 | 0.0644 | 0.0632 | 0.0620 | 0.0608 |
| 2.0 | 0.0540 | 0.0519 | 0.0519 | 0.0508 | 0.0498 |
| 2.1 | 0.0440 | 0.0431 | 0.0422 | 0.0413 | 0.0404 |
| 2.2 | 0.0355 | 0.0347 | 0.0339 | 0.0332 | 0.0325 |
| 2.3 | 0.0283 | 0.0277 | 0.0270 | 0.0264 | 0.0258 |
| 2.4 | 0.0224 | 0.0219 | 0.0213 | 0.0208 | 0.0203 |
| 2.5 | 0.0175 | 0.0117 | 0.0167 | 0.0163 | 0.0158 |
| 2.6 | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0126 | 0.0122 |
| 2.7 | 0.0104 | 0.0101 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0093 |
| 2.8 | 0.0079 | 0.0077 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 |
| 2.9 | 0.0060 | 0.0058 | 0.0056 | 0.0055 | 0.0053 |
| 3.0 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0042 | 0.0040 | 0.0039 |
| 3.1 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 |
| 3.2 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0022 | 0.0021 |
| 3.3 | 0.0017 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 |
| 3.4 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0011 |
| 3.5 | 0.0009 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0007 |
| 3.6 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0005 | 0.0005 |
| 3.7 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 |
| 3.8 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 |
| 3.9 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 |

Продовження додатка В

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
| 0.0 | 0.3984 | 0.3982 | 0.3980 | 0.3977 | 0.3973 |
| 0.1 | 03945 | 0.3939 | 0.3932 | 0.3925 | 0.3918 |
| 0.2 | 0.3867 | 0.3857 | 0.3847 | 0.3836 | 0.3825 |
| 0.3 | 0.3752 | 0.3739 | 0.3726 | 0.3712 | 0.3697 |
| 0.4 | 0.3605 | 0.3589 | 0.3572 | 0.3555 | 0.3538 |
| 0.5 | 0.3429 | 0.3410 | 0.3391 | 0.3372 | 0.3352 |
| 0.6 | 0.3230 | 0.3209 | 0.3387 | 0.3166 | 0.3144 |
| 0.7 | 0.3011 | 0.2989 | 0.2966 | 0.2943 | 0.2920 |
| 0.8 | 0.2780 | 0.2757 | 0.2732 | 0.2709 | 0.2685 |
| 0.9 | 0.2541 | 0.2516 | 0.2492 | 0.2468 | 0.2444 |
| 1.0 | 0.2299 | 0.2275 | 0.2251 | 0.2227 | 0.2203 |
| 1.1 | 0.2059 | 0.2036 | 0.2012 | 0.1989 | 0.1965 |
| 1.2 | 0.1826 | 0.1804 | 0.1781 | 0.1758 | 0.1736 |
| 1.3 | 0.1604 | 0.1582 | 0.1561 | 0.1539 | 0.1518 |
| 1.4 | 0.1394 | 0.1374 | 0.1354 | 0.1334 | 0.1315 |
| 1.5 | 0.1200 | 0.1182 | 0.1163 | 0.1145 | 0.1127 |
| 1.6 | 0.1023 | 0.1001 | 0.0983 | 0.0973 | 0.0957 |
| 1.7 | 0.0863 | 0.0848 | 0.0833 | 0.0818 | 0.0804 |
| 1.8 | 0.0721 | 0.0707 | 0.0694 | 0.0681 | 0.0669 |
| 1.9 | 0.0596 | 0.0584 | 0.0573 | 0.0562 | 0.0551 |
| 2.0 | 0.0488 | 0.0478 | 0.0468 | 0.0459 | 0.0449 |
| 2.1 | 0.0396 | 0.0388 | 0.0379 | 0.0371 | 0.0363 |
| 2.2 | 0.0317 | 0,0310 | 0.0303 | 0.0297 | 0.0290 |
| 2.3 | 0.0252 | 0.0246 | 0.0241 | 0.0235 | 0.0229 |
| 2.4 | 0.0198 | 0.0194 | 0.0189 | 0.0184 | 0.0108 |
| 2.5 | 0.0154 | 0.0151 | 0.0147 | 0.0143 | 0.0139 |
| 2.6 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 | 0.0107 |
| 2.7 | 0.0091 | 0.0088 | 0.0086 | 0.0084 | 0.0081 |
| 2.8 | 0.0069 | 0.0067 | 0.0065 | 0.0063 | 0.0061 |
| 2.9 | 0.0051 | 0.0050 | 0.0048 | 0.0047 | 0.0046 |
| 3.0 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 | 0.0035 | 0.0034 |
| 3.1 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0025 |
| 3.2 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0018 |
| 3.3 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0013 | 0.0013 |
| 3.4 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0009 | 0.0009 |
| 3.5 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0006 |
| 3.6 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0004 |
| 3.7 | 0.0004 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 |
| 3.8 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 |
| 3.9 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0001 |

**ДОДАТОК Г**

**ТАБЛИЦЯ ВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ**

1. 49487 25252 02431 69414 77285 52852 98740 85022 17778 81833 63789 61840
2. 52802 97738 42193 89353 35179 11444 98054 58736 03840 93449 54958 81740
3. 28667 23901 96960 70724 92042 71868 30195 12138 21636 57781 33167 60986
4. 62058 11106 19620 67893 67518 34534 09891 35146 56269 94621 10909 12498
5. 87822 86864 29188 23218 56773 69124 18453 62085 08149 90998 40343 71546
6. 14704 55808 05863 72452 68374 02760 79464 36170 19001 37561 81023 42249
7. 18519 22557 92900 03095 71115 06406 01156 25433 67367 59688 61590 13812
8. 17889 23214 06836 68333 98166 95284 95522 80787 13138 93299 44474 59902
9. 45869 15021 13433 13751 43352 87995 06884 96496 02400 27726 39810 27864
10. 14454 54268 21709 37260 06414 78560 55078 40579 89515 82167 10305 21809
11. 42243 45236 40338 54040 49158 80958 07636 37227 99460 60248 95076 20944
12. 10153 09129 42477 71253 20908 03808 04876 80750 45915 75845 79089 97852
13. 20891 53031 78804 88789 44859 83655 61063 08261 45637 37296 87380 26586
14. 90883 12260 36272 98203 29089 18415 57571 97048 41353 33783 28982 32796
15. 15782 01278 72053 54999 76130 96563 69434 60438 35335 42393 97750 51513
16. 98167 14404 07958 96564 51442 43582 14965 75063 69087 28185 82221 47475
17. 86837 40969 67158 00789 34453 82207 20911 05989 57536 31880 35584 48621
18. 99166 33419 60979 68879 98590 53322 73162 84414 68418 00241 27444 20067
19. 92143 14188 79891 47134 37353 30419 33576 16685 10247 31642 85793 88975
20. 82441 69557 92409 83941 61137 64485 52889 82103 93253 37526 69755 39506
21. 30458 38905 96545 21944 36910 48745 32519 75757 07911 89887 30543 68442
22. 21. 49207 91282 15638 28328 71928 47626 9199312965 97756 03328 99488 55201
23. 62358 79309 90114 00692 63327 28856 59374 29285 89561 76911 75363 33946
24. 41532 49022 93730 8916400980 28382 83994 11481 27464 93168 94187 42495
25. 30057 17405 13741 96025 32154 60639 59873 31744 25133 56236 32885 28384
26. 53017 18830 70177 01383 46006 51370 51217 41754 60026 89056 23887 89889
27. 10375 09186 49175 50252 62289 70091 62806 24428 16436 67905 10872 50278
28. 97204 07629 42113 67044 28079 58261 20028 81819 75846 94933 22793 91985
29. 98675 01785 21600 70596 03076 70135 26545 02354 83718 05456 26232 58185
30. 77634 78317 69625 58266 15619 88259 16820 37895 08533 52347 87356 19124
31. 22403 70701 69804 65806 43902 49145 47363 26244 72875 09065 68256 38744
32. 56698 36907 96122 22398 53070 71587 36295 87033 39496 16283 51225 81018
33. 88524 51242 42342 19470 54319 14273 62126 90247 06385 61398 92645 41909
34. 13692 52083 28467 63653 19347 62440 42358 79131 48458 08288 77747 70458
35. 55012 43126 79037 27055 59506 15770 20322 38773 30545 00708 33104 72459
36. 25343 90379 13218 02606 75440 03281 82000 67687 74383 21816 81206 66136
37. 76391 60380 63510 43347 90826 58124 52830 45541 22814 39615 00112 97266

**ДОДАТОК Д**

**ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ** 

**ДОДАТОК Е**

**ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ**



**Використані терміни**

**Аксіоматичне означення ймовірності** – ймовірністю на (Ω,S) називають числову функцію P(A), визначену на S, яка задовольняє аксіоми:

1. Ймовірність будь-якої події А з S є невід’ємною величиною.
2. Ймовірність події Ω дорівнює одиниці.
3. Якщо – попарно несумісні події, то ймовірність появи хоча б однії з них дорівнює сумі йомвірностей цих подій: *P*() =

**Асиметрія** - відношення центрального емпіричного моменту третього порядку до кубa вибіркового середньоквадратичного відхилення.

**Безповторна вибірка** - вибірка, при якій відібраний об'єкт після проведення спостережень не повертається в генеральну сукупність.

**Вибірка** або **вибіркова сукупність** - сукупність випадково відібраних елементів генеральної сукупності.

**Вибіркова дисперсія** дискретного статистичного розподілу вибірки – середнє значення квадратів відхилень його варіант від вибіркового середнього з урахуванням їх частот.

**Вибіркове середнє** дискретного статистичного розподілу – середнє арифметичне значень варіант xiз урахуванням їх частот ni.

**Випадкова величина** – величина Х, яка залежно від випадкового результату експерименту набуває лише одного з можливих для неї числових значень.

**Випробування** – дія, яку за певних умов можна повторювати довільну кількість разів і результат якої неможливо передбачити.

**Генеральна сукупність** – множина всіх реально наявних або навіть тільки уявно можливих об’єктів однакової природи, які вивчають під кутом зору їх розподілу за деякою ознакою.

**Геометричне означення ймовірності** – геометричною ймовірністю події А називають відношення міри m(A) підобласті до міри m(Ω) простору елементарних подій.

**Гістограма частот** - східчаста фігура, що складається з прямокутників площею ni

**Дискретна випадкова величина** – величина, якщо множина її можливих значень є скінченною чи зліченною.

**Дисперсія** - математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

**Довірчий інтервал** - інтервал, який покриває невідомий параметр θ із заданою надійністю y.

**Достовірна подія** - подія, що обов'язково станеться, якщо буде виконана певна сукупність умов.

**Ексцес розподілу** - величина, що визначається відношенням центрального моменту четвертого порядку до четвертого ступеня середнього квадратичного відхилення за вирахуванням трійки.

**Елементарна подія** – подія, яку не можна розглядати як супуність деяких інших подій.

**Емпіричне значення критерію** гіпотези – значення випадкової величини, обчислене за певною вибіркою.

**Ефективна оцінка** - така оцінка, яка при заданому обсязі вибірки n має найменшу можливу дисперсію

**Закон розподілу** – будь-яка характеристика випадкової величини, якщо за певним правилом з неї можна одержати функцію розподілу.

**Інтервальна оцінка** - оцінка, яка визначається кінцями інтервалу.

**Класичне означення ймовірності** – відношення кількості m елементарних подій, що сприяють появі події А, до загальної кількості n усіх елементарних рівноможливих подій.

**Конкуруюча гіпотеза** – гіпотеза, яка повністю чи частково суперечить висунутій.

**Кореляційна залежність** - залежність, в якій при зміні однієї з величин змінюється середнє значення іншої.

**Кореляційний момент** - характеристика зв'язку між двома випадковими величинами.

**Коефіцієнт варіації** статистичного розподілу вибірки – відношення середнього квадратичного відхилення до вибіркового середнього, виражене у відсотках.

**Коефіцієнт кореляції** - відношення коваріації до твору середніх квадратичних відхилень двох випадкових величин.

**Критерій згоди** – критерій перевірки гіпотези про передбачуваний вигляд закону розподілу.

**Критична область** - сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають.

**Кумулятивна крива** – графік емпіричної функції розподілу.

**Математичне сподівання** - число, за яким стабілізується середнє арифметичне можливих значень випадкової величини при досить великій кількості випробувань.

**Медіана випадкової величини** – таке її значення, відносно якого ймовірність набуття нею як більших, так і менших значень не перевищує 0,5

**Мода** - варіанта ряду, яка має найбільшу частоту.

**Моменти випадкових величин** - характеристики випадкових величин, що визначають математичне спдівання k-го ступеня відхилення випадкової величини.

**Найімовірніше число появи події А** - в серії з n незалежних випробувань називають число m0, якому відповідає найбільше значення ймовірності Pn(m)

**Неперервна випадкова величина –** величина, функція розподілу якої є неперервною функцією.

**Нульова гіпотеза** - основна висунута гіпотеза.

**Повна група подій** – декілька подій, де хоча б одна з яких є достовірною.

**Повторна вибірка** - вибірка, при якій відібраний об'єкт після проведення спостережень повертається в генеральну сукупність.

**Подія** – результат випробування.

**Полігон частот** - ламана лінія, відрізки якої з'єднують точки (x1, n1).

**Простір елементарних подій** – сукупність усіх можливих елементарних подій, які відповідають певному випробуванню.

**Регресія** - уявлення однієї випадкової величини як функції іншої.

**Репрезентативна вибірка** – вибірка, коли всі об’єкти генеральної сукупності мають однакову можливість до неї потрапити.

**Розмах варіювання R** - різниця між максимальним і мінімальним значенням її варіант.

**Середнє квадратичне відхилення** – числова характеристика, що використовується для оцінювання міри розсіювання випадкової величини.

**Складна подія** – подія, яку можна розглядати як деяку сукупність інших подій.

**Статистична гіпотеза** - гіпотеза про вигляд невідомого закону розподілу або про параметри невідомого розподілу.

**Статистична залежність** - залежність, за якої зміна однієї з випадкових величин спричиняє зміну розподілу іншої випадкової величини.

**Статистичне означення ймовірності** – ймовірністю події А називають число Р\*(А), навколо якого коливається (дорівнює) відносна частота появи події Wn(A) у серіях з достатньо великою кількістю n випробувань.

**Статистичний критерій** - випадкова величина, що служить для перевірки нульової гіпотези.

**Статистичний розподіл вибірки** - перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот.

**Стохастична залежність** - залежність, при якій зміна однієї з величин тягне за собою зміну іншої.

**Теорія ймовірностей** - наука, що вивчає загальні закономірності випадкових явищ масового характеру.

**Точкова оцінка** - оцінка, яка визначається одним числом.

**Умовна ймовірність** - ймовірність настання події, що цікавить нас пов’язана з додатковими умовами.

**Умовний закон розподілу** однієї складової системи (Х,У) випадкових величин називають закон розподілу, який знайдено за умови, що інша складова системи набула певного числового значення.

**Функція розподілу** - функція, що визначає ймовірність того, що X прийме значення менше x.

**Щільність розподілу ймовірностей** - ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення в зазначеному інтервалі.